مقدمه‌ی مؤلفان

به نام خدا

خداوند بزرگ را شکرگزار هستیم که توفیق تألیف این کتاب را به ما داد.

در این کتاب با دقت به همه‌ی سرفصل‌های کتاب درسی هندسه (۲) پرداخته‌ایم و به تعاریف و قضایا توجه کرده‌ایم. با حل مسائل متعدد و تست‌های نمونه، مطالب و مفاهیم کتاب درسی را مطرح کرده و بسط داده‌ایم.

هر فصل کتاب، مطابق کتاب درسی، به چند درس تقسیم شده است. در هر درس تعریف‌ها و نکات اصلی را با آوردن چند مثال به روشنی بیان کرده‌ایم. همین‌طور، همه‌ی قضیه‌ها را به طور کامل ثابت کرده‌ایم. همه جا به چارچوب کتاب درسی پایبند بوده‌ایم. علاوه بر این‌ها، با آوردن مسئله‌ها و تست‌هایی که به دقت انتخاب شده‌اند، نحوه‌ی استفاده از قضیه‌ها را کامل آموزش داده‌ایم. در انتهای هر درس، تمرین‌ها و پرسش‌های چهارگزینه‌ای مناسب آن درس را آورده‌ایم، که راه‌حل همه‌ی آن‌ها در انتهای فصل آمده است.

پیش از هر چیز، این نکته‌ی مهم را به خاطر داشته باشید که سرعت خواندن در هندسه، کم‌تر از درس‌های دیگر است. همیشه باید درباره‌ی آنچه که می‌خوانید تفکر و پرسش کنید، نه این‌که صرفاً قضیه‌ها را حفظ کنید و راه‌حل مسئله‌ها را به خاطر بسپارید. به این ترتیب، هنگام مطالعه، حتماً به استدلال‌ها دقت کنید و مطمئن شوید می‌فهمید که چرا این کارها را در روند اثبات یا راه‌حل انجام داده‌ایم. همین‌طور، همواره کاغذ و قلم در کنار خود داشته باشید و سعی کنید آن‌چه را می‌خوانید برای خودتان توضیح دهید. همچنین، بهتر است زمانی که به مسئله، تست یا تمرین می‌رسید، سعی کنید خودتان آن را حل کنید. اگر مسئله‌ای را حل کردید یا از حل کردن آن ناامید شدید، حتماً راه‌حل ما را هم ببینید، زیرا ممکن است روش آن برای شما آموزنده باشد.

وظیفه‌ی خود می‌دانیم که از همکاران عزیزمان در نشر الگو، واحد حروف‌چینی سرکار خانم نسیم سادات نوریان و واحد ویراستاری خانم‌ها مریم موحدی‌مهر، مریم بیوک‌زاده و عاطفه ربیعی به سرپرستی سرکار خانم سکینه مختار که زحمات زیادی برای آماده‌سازی و تولید این کتاب کشیده‌اند، تشکر و قدردانی کنیم.

مؤلفان

فهرست

فصل اول: دایره

درس اول: مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره ۲
تمرین ۲۴
پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۲۸
درس دوم: رابطه‌های طولی در دایره ۳۳
تمرین ۵۷
پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۶۴
درس سوم: چندضلعی‌های محاطی و محیطی ۶۹
تمرین ۸۷
پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۹۱
راه‌حل تمرین‌ها ۹۶
پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۱۲۴

فصل دوم: تبدیل‌های هندسی و کاربردها

درس اول: تبدیل‌های هندسی ۱۴۸
تمرین ۱۶۶
پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۱۶۸
درس دوم: کاربرد تبدیل‌ها ۱۷۱
تمرین ۱۸۲
پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۱۸۵
راه‌حل تمرین‌ها ۱۸۹
پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۲۰۰

فصل سوم: روابط طولی در مثلث

درس اول: قضیه‌ی سینوس‌ها ۲۱۰

تمرین ۲۱۹

پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۲۲۱

درس دوم: قضیه‌ی کسینوس‌ها ۲۲۳

تمرین ۲۲۹

پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۲۳۱

درس سوم: قضیه‌ی نیمسازهای زوایای داخلی و محاسبه‌ی طول نیمسازها ۲۳۳

تمرین ۲۴۳

پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۲۴۵

درس چهارم: قضیه‌ی هرون (محاسبه‌ی ارتفاع‌ها و مساحت مثلث) ۲۴۸

تمرین ۲۵۴

پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۲۵۶

راه‌حل تمرین‌ها ۲۵۸

پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۲۷۳

فصل اول: دایره

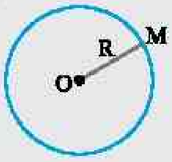
درس اول: مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

یکی از شکل‌های مهم هندسی دایره است. در سال‌های قبل با تعریف و برخی از ویژگی‌های دایره آشنا شده‌اید. هدف از این درس، یادآوری آنچه خوانده‌اید و تکمیل مطالب سال‌های قبل است.

دایره

برای تعریف کردن دقیق دایره نیاز به دانستن مفهوم «مکان هندسی» است. چون مفهوم مکان هندسی خارج از برنامه‌ی این درس است، ما هم یک تعریف شهودی از دایره می‌آوریم.

تعریف فرض کنید O نقطه‌ای ثابت و R عددی حقیقی و مثبت باشد. دایره‌ی به مرکز O و شعاع R مجموعه‌ی تمام نقطه‌هایی از صفحه است که فاصله‌ی آن‌ها از نقطه‌ی O برابر R باشد.



M روی دایره است $\Leftrightarrow OM=R$

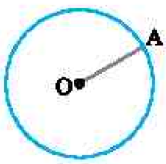
توجه دایره‌ی C به مرکز O و شعاع R را به‌صورت $C(O,R)$ نمایش می‌دهیم.

نکته دو دایره با شعاع‌های مساوی با هم برابرند.

وضع نقطه و دایره

نقطه‌ی A و دایره‌ی $C(O,R)$ را در نظر بگیرید. وضعیت این نقطه نسبت به دایره، به یکی از سه حالت زیر است:

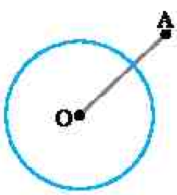
۱) نقطه‌ی A روی دایره‌ی $C(O,R)$ است.



به مجموعه‌ی نقطه‌هایی که فاصله‌ی آن‌ها تا مرکز دایره برابر اندازه‌ی شعاع دایره باشد، نقطه‌های «روی دایره» می‌گوییم.

نقطه‌های روی دایره $=\{A \mid OA=R\}$

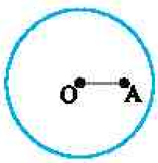
۲) نقطه‌ی A بیرون دایره‌ی $C(O,R)$ است.



به مجموعه‌ی نقطه‌هایی که فاصله‌ی آن‌ها از مرکز دایره بزرگ‌تر از اندازه‌ی شعاع دایره باشد، نقطه‌های «بیرون دایره» می‌گوییم.

نقطه‌های بیرون دایره $=\{A \mid OA>R\}$

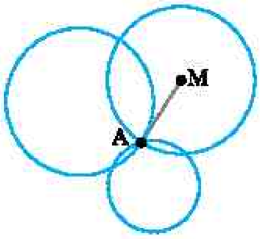
۳) نقطه‌ی A درون دایره‌ی $C(O,R)$ است.



به مجموعه‌ی نقطه‌هایی که فاصله‌ی آن‌ها از مرکز دایره کمتر از اندازه‌ی شعاع دایره باشد، نقطه‌های «درون دایره» می‌گوییم.

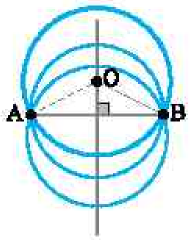
نقطه‌های درون دایره $=\{A \mid OA<R\}$

مسئله ۱ **نقطه‌ی ثابت A در صفحه مفروض است. از نقطه‌ی A چند دایره می‌گذرد؟ مرکز این دایره‌ها کجا قرار دارند؟**



راه‌حل: از یک نقطه مانند A نامتناهی دایره می‌گذرد و مرکز این دایره‌ها هر نقطه در صفحه غیر از نقطه‌ی A می‌تواند باشد.
توضیح: نقطه‌ی دلخواه M در صفحه را در نظر بگیرید.
اگر به مرکز M و شعاع MA دایره‌ای رسم کنیم این دایره از نقطه‌ی A می‌گذرد.

مسئله ۲ **دو نقطه‌ی متمایز A و B در صفحه مفروض‌اند. از این دو نقطه چند دایره می‌گذرد؟ مرکز این دایره‌ها را در صورت وجود پیدا کنید.**

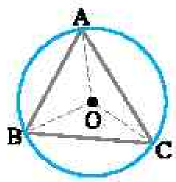


راه‌حل: از دو نقطه‌ی متمایز A و B نامتناهی دایره می‌گذرد. مرکز این دایره‌ها روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد و بر عکس، یعنی هر نقطه روی عمودمنصف پاره‌خط AB می‌تواند مرکز دایره‌ای باشد که از A و B می‌گذرد.
توضیح: اگر O مرکز دایره‌ای باشد که از A و B می‌گذرد، آن‌گاه

$$\text{شعاع دایره} = OA = OB$$

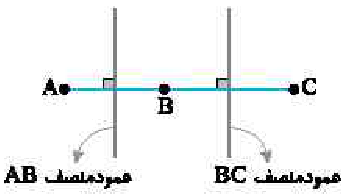
پس O از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله است، یعنی O روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد.

مسئله ۳ **از سه نقطه‌ی A، B و C چند دایره می‌گذرد؟ مرکز این دایره یا دایره‌ها در صورت وجود کجا قرار دارد؟**



راه‌حل: این مسئله را باید در دو حالت بررسی کنیم.
حالت اول سه نقطه‌ی A، B و C روی یک خط قرار ندارند.
اگر سه نقطه روی یک خط قرار نداشته باشند، فقط یک دایره از آن‌ها می‌گذرد و مرکز این دایره محل برخورد عمودمنصف‌های ضلع‌های مثلث ABC است.

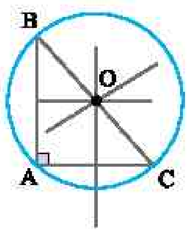
توجه به این دایره، دایره‌ی محیطی مثلث ABC می‌گوییم. در بخش‌های بعدی در مورد این دایره بیشتر بحث می‌کنیم.



حالت دوم سه نقطه‌ی A، B و C روی یک خط راست قرار دارند.
از سه نقطه‌ی واقع بر یک خط دایره‌ای عبور نمی‌کند، زیرا عمودمنصف‌های پاره‌خط‌هایی که این نقطه‌ها را به هم وصل می‌کنند، موازی‌اند. پس نقطه‌ای که از این سه نقطه به یک فاصله باشد وجود ندارد.

تست ۱ در مثلث قائم‌الزاویه که طول ضلع‌های قائمه‌ی آن ۶ و ۸ است، شعاع دایره‌ی محیطی کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۱۰



پاسخ: از سه رأس مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC یک دایره عبور می‌کند و مرکز این دایره نقطه‌ی تلاقی عمودمنصف‌های ضلع‌های این مثلث است. از طرفی نقطه‌ی تلاقی عمودمنصف‌های ضلع‌های مثلث قائم‌الزاویه وسط وتر است. بنابراین مرکز این دایره وسط وتر و شعاع آن نصف وتر است.

$$\triangle ABC: BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ = ۶۴ + ۳۶ = ۱۰۰$$

$$BC = ۱۰ \Rightarrow ۲R = ۱۰ \Rightarrow R = ۵$$

بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

تست ۲ **دو نقطه‌ی M و N به فاصله‌ی ۵ از یکدیگر قرار دارند. شعاع کوچک‌ترین دایره‌ای که از این دو نقطه عبور می‌کند کدام است؟**

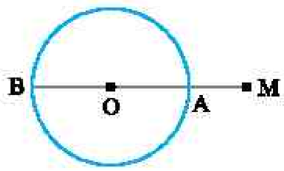
۱) ۵ ۲) ۲/۵ ۳) ۱۰ ۴) ۷/۵

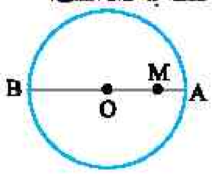
پاسخ: از دو نقطه‌ی M و N نامتناهی دایره می‌گذرد و کوچک‌ترین دایره‌ی گذرنده از آن‌ها دایره‌ای به قطر MN است. بنابراین

$$۲R = MN = ۵ \Rightarrow R = \frac{۵}{۲}$$

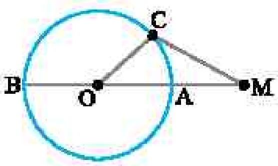
بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

مسئله ۴ **با توجه به شکل‌ها، ثابت کنید در هر دو حالت در بین نقطه‌های روی دایره، A نزدیک‌ترین نقطه به M و B دورترین نقطه به M است.**





راه‌حل: **حالت اول** M بیرون دایره است. نقطه‌ی C را روی دایره در نظر می‌گیریم. ثابت می‌کنیم



$$MC < MB \,,\, MA < MC$$

نقطه‌ی C را به M و O وصل می‌کنیم. در مثلث OMC بنابر نابرابری مثلث،

$$OM - OC < MC < OM + OC$$

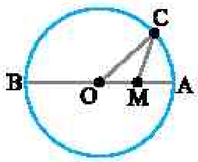
چون $OC = OA = OB = R$، پس

$$OM - OA < MC < OM + OB$$

یعنی

$$MA < MC < MB$$

حالت دوم نقطه‌ی M درون دایره است.



با استدلالی مشابه حالت اول، نقطه‌ی C را روی دایره در نظر می‌گیریم.

در مثلث OMC بنابر نابرابری مثلث،

$$OC - OM < MC < OM + OC$$

چون $OC = OA = OB = R$، پس

$$OA - OM < MC < OM + OB$$

در نتیجه

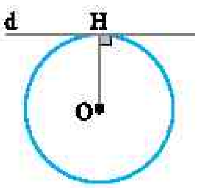
$$MA < MC < MB$$

اوضاع نسبی یک خط و یک دایره

خط d و دایره‌ی $C(O,R)$ را در نظر بگیرید. بر اساس تعداد نقطه‌های مشترک خط d و دایره‌ی $C(O,R)$، می‌توان وضعیت خط و دایره نسبت به هم را به سه حالت تقسیم کرد.

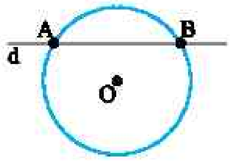
۱) خط d بر دایره‌ی $C(O,R)$ مماس است.

در این حالت خط و دایره تنها در یک نقطه مشترک‌اند. (شکل را ببینید).



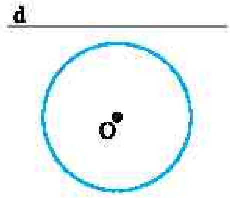
۲) خط d و دایره‌ی $C(O,R)$ متقاطع‌اند.

در این حالت خط و دایره دو نقطه‌ی اشتراک دارند.



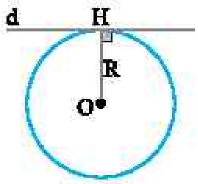
۳) خط d خارج دایره‌ی $C(O,R)$ است.

در این حالت، خط و دایره، هیچ نقطه‌ی مشترکی ندارند.



توجه می‌توان سه حالت وضعیت خط و دایره را با مقایسه‌ی فاصله‌ی مرکز دایره تا خط و شعاع دایره نیز بیان کرد.

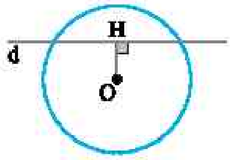
۱) اگر فاصله‌ی مرکز دایره تا خط **d** برابر با شعاع دایره باشد، آن‌گاه خط و دایره یک نقطه‌ی اشتراک دارند؛ یعنی خط بر دایره مماس است.



$OH = R \Leftrightarrow$ خط d مماس بر دایره است

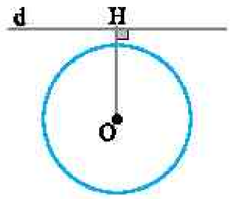
توجه اثبات این مطلب که
«شعاع دایره در نقطه‌ی تماس، بر خط مماس عمود است» را بعداً می‌آوریم.

۲) اگر فاصله‌ی مرکز دایره تا خط **d** کمتر از شعاع دایره باشد، آن‌گاه خط و دایره دو نقطه‌ی تماس دارند؛ یعنی خط، دایره را قطع می‌کند.



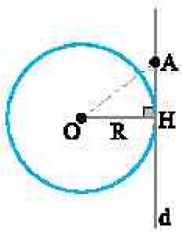
$OH < R \Leftrightarrow$ خط **d** دایره‌را قطع می‌کند

۳) اگر فاصله‌ی مرکز دایره تا خط **d** ، بزرگ‌تر از شعاع دایره باشد، آن‌گاه خط و دایره، هیچ نقطه‌ی مشترکی ندارند؛ یعنی خط خارج دایره است.



$OH > R \Leftrightarrow$ خط **d** دایره‌را قطع نمی‌کند

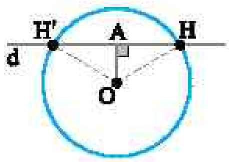
مسئله ۵ **ثابت کنید اگر خطی در انتهای شعاعی از دایره که روی دایره است، بر آن شعاع عمود باشد، آن‌گاه این خط بر دایره مماس است.**



راه‌حل: در شکل روبه‌رو خط **d** در نقطه‌ی **H** بر شعاع OH عمود است، باید ثابت کنیم خط **d** بر دایره مماس است.
برای این کار کافی است ثابت کنیم خط **d** و دایره‌ی $C(O,R)$ فقط در نقطه‌ی **H** مشترک‌اند.
فرض کنید نقطه‌ی **A** نقطه‌ای غیر از **H** و روی خط **d** باشد. چون مثلث OAH قائم‌الزاویه است و OA وتر آن است. پس $OH < OA$ ، یعنی $R < OA$. بنابراین **A** خارج دایره است. در نتیجه خط **d** و دایره فقط در یک نقطه‌ی **H** مشترک هستند و این نتیجه می‌دهد که خط **d** بر دایره مماس است.

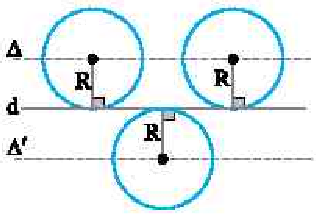
مسئله ۶ ثابت کنید شعاع دایره در نقطه‌ی تماس، بر خط مماس عمود است.

راه‌حل: فرض کنید خط d در نقطه‌ی H بر دایره‌ی $C(O, R)$ مماس باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم OH بر d عمود است. برای این کار از برهان خلف استفاده می‌کنیم.



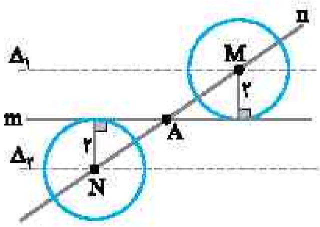
(برهان خلف): فرض کنید OH بر d عمود نباشد. از مرکز دایره O عمود OA را بر خط d رسم می‌کنیم (شکل را ببینید). نقطه‌ی H' را مطابق شکل به‌گونه‌ای روی d انتخاب کرده‌ایم که $AH = AH'$.
دو مثلث AOH و AOH' همنهشت هستند ($AH = AH'$ و $\hat{A} = ۹۰^\circ$ و $OA = OA$ ضلع مشترک)، در نتیجه $OH' = OH = R$، یعنی H' هم روی دایره است و این با مماس بودن خط d بر دایره تناقض دارد. بنابراین فرض خلف نادرست است، در نتیجه خط d در نقطه‌ی H بر OH عمود است.

مسئله ۷ خط d مفروض است. مرکزهای همه‌ی دایره‌هایی که شعاع آن‌ها مقدار ثابت R است و بر این خط مماس هستند، روی چه شکلی قرار دارند؟



راه‌حل: فرض کنید دایره‌های به شعاع R بر خط d مماس باشند. در این صورت، چون شعاع دایره در نقطه‌ی تماس بر خط مماس عمود است، پس فاصله‌ی مرکز این دایره‌ها از خط d مقدار ثابت R است. در نتیجه مرکز این دایره‌ها روی دو خط موازی d و به فاصله‌ی R از آن هستند. (دو خط Δ و Δ' در شکل)

مسئله ۸ دو خط m و n در نقطه‌ی A متقاطع هستند. دایره‌ای رسم کنید که مرکز آن روی n و شعاع آن ۲ سانتی‌متر باشد و بر m مماس باشد.

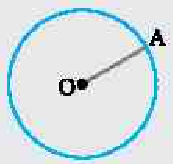


راه‌حل: بنابر مسئله‌ی قبل، مرکز دایره‌های به شعاع ۲ که بر خط m مماس هستند روی دو خط موازی m و به فاصله‌ی ۲ از آن قرار دارند (دو خط Δ_1 و Δ_2 در شکل).
پس محل برخورد خط‌های Δ_1 و Δ_2 با خط n مرکز این دایره‌ها است (نقطه‌های M و N در شکل).
اکنون کافی است به مرکزهای M و N و شعاع ۲ دایره‌هایی رسم کنیم. این دایره‌ها بر خط m مماس هستند.

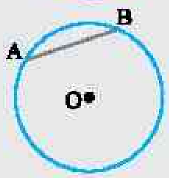
یادآوری:

برخی از مفاهیم اولیه

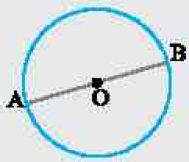
۱) شعاع دایره: پاره‌خطی را که یک سر آن مرکز دایره و سر دیگر آن نقطه‌ای روی دایره باشد شعاع دایره می‌گوییم.
مثلاً، پاره‌خط OA در شکل روبه‌رو شعاع دایره است.



۲) وتر دایره: پاره‌خطی را که دو سر آن روی محیط دایره قرار دارند وتر می‌نامیم.
مثلاً، پاره‌خط AB در شکل روبه‌رو وتر است.

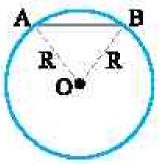


۳) قطر دایره: وتری از یک دایره را که از مرکز آن دایره می‌گذرد، قطر آن دایره می‌نامیم.
واضح است که اگر R اندازه‌ی شعاع دایره باشد، اندازه‌ی تمام وترها کوچک‌تر یا مساوی $۲R$ است.



تذکر هر قطر، دایره را به دو کمان مساوی تقسیم می‌کند که به آن کمان‌ها نیم‌دایره می‌گوییم.

مسئله ۹ **ثابت کنید قطر دایره بزرگ‌ترین وتری است که می‌توان در دایره رسم کرد.**



راه‌حل: وتر دلخواه AB را در نظر می‌گیریم (شکل را ببینید). در مثلث OAB،

$$AB < OA + OB$$

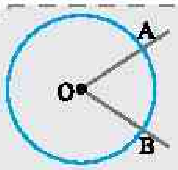
یعنی

$$AB < R + R \Rightarrow AB < ۲R$$

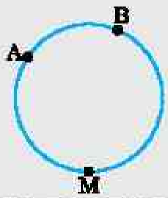
پس هر وتر دلخواه مانند AB از طول قطر دایره کوچک‌تر است.

یادآوری:

۴) زاویه‌ی مرکزی: زاویه‌ای را که رأس آن مرکز دایره باشد، زاویه‌ی مرکزی می‌گوییم.
در شکل روبه‌رو O مرکز دایره است و زاویه‌ی AOB یک زاویه‌ی مرکزی است.

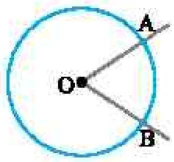


۵) کمان: دو نقطه‌ی A و B را روی محیط دایره در نظر بگیرید. این دو نقطه محیط دایره را به دو قسمت تقسیم می‌کنند که به آن کمان یا قوس می‌گوییم (شکل را ببینید).



توجه کمان کوچک‌تر ایجاد شده توسط دو نقطه‌ی A و B را با $\overset{\frown}{AB}$ نشان می‌دهیم و برای نشان دادن کمان بزرگ‌تر از نقطه‌ای کمکی مانند M روی محیط دایره استفاده می‌کنیم و آن را به صورت $\overset{\frown}{AMB}$ می‌نویسیم.

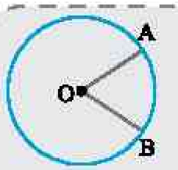
تذکر کمانی از دایره را که یک زاویه‌ی مرکزی روی محیط دایره ایجاد می‌کند «کمان نظیر آن زاویه» می‌نامیم.



یادآوری:

۶) اندازه‌ی کمان: اندازه‌ی کمان، همان اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی مقابل به آن کمان است و واحد آن درجه است.
در این حالت می‌نویسیم

$$A\hat{O}B = \overset{\frown}{AB}$$

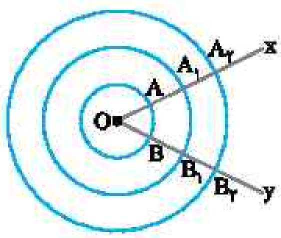


تذکر دقت کنید که نباید اندازه‌ی یک کمان را با طول آن اشتباه گرفت. برای درک این مطلب به شکل روبه‌رو نگاه کنید. در این شکل سه دایره‌ی هم‌مرکز رسم کرده‌ایم. با توجه به مطلب بالا، اندازه‌ی کمان‌های AB، $A_۱B_۱$ و $A_۲B_۲$ برابرند. یعنی

$$x\hat{O}y = \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A_۱B_۱} = \overset{\frown}{A_۲B_۲}$$

اما طول این کمان‌ها با هم برابر نیستند:

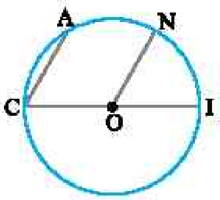
طول کمان AB > طول کمان $A_۱B_۱$ > طول کمان $A_۲B_۲$

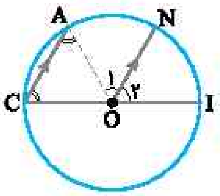


نکته **چون محیط دایره، کمانی به اندازه‌ی °۳۶۰ است، می‌توان تناسب زیر را نوشت**

$$\frac{\text{طول کمان } AB}{\text{محیط دایره}} = \frac{\text{اندازه‌ی کمان } AB}{۳۶۰^\circ}$$

مسئله ۱۰ در شکل مقابل، O مرکز دایره، CI قطر دایره و $CA \parallel ON$ ، ثابت کنید $\overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{NI}$.





راه‌حل: شـعاع OA را رسـم می‌کنیم. می‌دانیم، اندازه‌ی هر زاویه‌ی مرکزی، برابر با کمان مقابل به آن است. در نتیجه

$$\hat{O}_1 = \overset{\frown}{AN}, \quad \hat{O}_2 = \overset{\frown}{NI}$$

اگر ثابت کنیم $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ حکم ثابت می‌شود. چون $OA = OC$ (شعاع دایـره)، پس مثلث OAC متساوی‌السـاقین اسـت. یعنی $\hat{A} = \hat{C}$. از طرف دیگر چون $ON \parallel CA$ و CI مورب است، پس

$$\hat{O}_2 = \hat{C}$$

با همین استدلال، چون $ON \parallel CA$ و OA مورب است، پس

$$\hat{O}_1 = \hat{A}$$

بنابراین $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$، در نتیجه

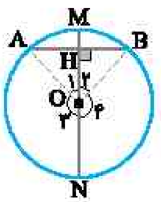
$$\overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{NI}$$

چند مسئله مهم در مورد وتر و کمان نظیر آن

مسئله ۱۱ ثابت کنید در هر دایره قطر عمود بر یک وتر، آن وتر و کمان‌های نظیر آن را نصف می‌کند.

راه‌حل: قطر MN عمود بر وتر AB را رسم می‌کنیم. می‌خواهیم ثابت کنیم

$$\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{BM}, \quad \overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{BN}, \quad AH = BH$$



(شـکل را ببینید). از نقطه‌ی O مرکز دایره به نقطه‌های A و B وصل می‌کنیم. مثلث OAB متساوی‌السـاقین است، چون $OA = OB$. در این مثلث OH ارتفاع وارد بر قاعده‌ی AB اسـت، پس OH هم میانه و هم نیمساز است.

چون OH میانه است، پس $AH = BH$ و چون OH نیمساز است، پس

$$\hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

در نتیجه

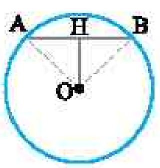
$$\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{BM}$$

همچنین $\hat{O}_3 = \hat{O}_4$، بنابراین

$$\overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{BN}$$

مسئله ۱۲ ثابت کنید خطی که مرکز دایره را به وسط یک وتر وصل می‌کند، بر آن وتر عمود است.

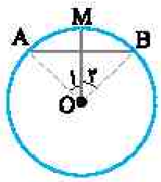
راه‌حل: از مرکـز دایره به نقطه‌ی H وسـط وتر AB وصل می‌کنیم. باید ثابت کنیم OH بر AB عمود است.



مثلـث OAB متساوی‌السـاقین اسـت ($OA = OB$) و پاره‌خط OH میانه‌ی این مثلث متساوی‌السـاقین اسـت. در نتیجه OH ارتفاع هم اسـت (در مثلث متساوی‌الساقین ارتفاع و میانه‌ی وارد بر ساق بر هم منطبق‌اند)، یعنی

$$OH \perp AB$$

مسئله ۱۳ **ثابت کنید خطی که مرکز دایره را به وسط کمان نظیر یک وتر وصل می‌کند، بر آن وتر عمود است.**



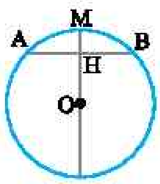
راه‌حل: در شکل روبه‌رو، M وسط کمان AB از دایره‌ی $C(O, R)$ است. می‌خواهیم ثابت کنیم OM بر وتر AB عمود است. چون M وسط کمان AB است، پس $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB}$، در نتیجه زاویه‌های مرکزی روبه‌رو به این کمان‌ها با هم برابرند، یعنی $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$.

مثلث OAB متساوی‌الساقین است، چون $OA = OB = R$. پاره‌خط OM نیمساز زاویه‌ی رأس O در مثلث متساوی‌الساقین OAB است.

می‌دانیم در مثلث متساوی‌الساقین نیمساز و ارتفاع نظیر رأس بر هم منطبق‌اند، بنابراین OM ارتفاع این مثلث هم است، یعنی

$$OM \perp AB$$

مسئله ۱۴ **ثابت کنید خطی که وسط یک کمان و وسط وتر متناظر آن کمان را به هم وصل می‌کند، از مرکز دایره می‌گذرد.**



راه‌حل: در شکل روبه‌رو نقطه‌ی H وسط وتر AB و نقطه‌ی M وسط کمان AB است. می‌خواهیم ثابت کنیم امتداد MH از نقطه‌ی O مرکز دایره می‌گذرد.

از نقطه‌ی O به نقطه‌ی H وصل می‌کنیم. چون H وسط AB است، پس

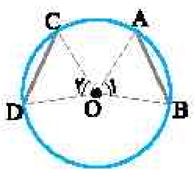
$$OH \perp AB$$

از طرف دیگر اگر از O به M وصل کنیم، چون M وسط کمان AB است، پس $OM \perp AB$.

می‌دانیم از یک نقطه، فقط یک عمود بر یک خط می‌توان رسم کرد. بنابراین OM و OH بر هم منطبق‌اند، در نتیجه نقطه‌های M، H و O روی یک خط قرار دارند، یعنی امتداد MH از O می‌گذرد.

چند مسئله‌ی مهم در مورد دو وتر از یک دایره

مسئله ۱۵ **ثابت کنید کمان‌های نظیر دو وتر مساوی با هم برابرند و بر عکس.**



راه‌حل: اثبات دو بخش دارد.

بخش اول فرض می‌کنیم $AB = CD$ و ثابت می‌کنیم $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ (شکل را ببینید). از مرکز دایره به دو سر وترهای AB و CD وصل می‌کنیم.

دو مثلث OAB و OCD به حالت تساوی سه ضلع همنهشت‌اند:

$$OA = OC = R, \quad OB = OD = R, \quad AB = CD$$

بنابراین $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$، در نتیجه $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$.

بخش دوم فرض می‌کنیم $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ و ثابت می‌کنیم

$$AB = CD$$

چون دو کمان AB و CD با هم برابرند، پس زاویه‌های مرکزی روبه‌رو به آن‌ها با هم برابرند، یعنی $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$.

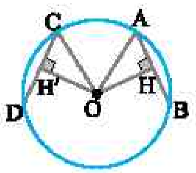
اکنون دو مثلث OAB و OCD به حالت تساوی دو ضلع و زاویه‌ی بین آن‌ها با هم همنهشت‌اند:

$$\hat{O}_1 = \hat{O}_2, \quad OA = OC = R, \quad OB = OD = R$$

و در نتیجه

$$AB = CD$$

مسئله ۱۶ **ثابت کنید در هر دایره وترهای مساوی از مرکز دایره به یک فاصله‌اند و بر عکس.**



راه‌حل: فرض می‌کنیم $AB = CD$. می‌خواهیم ثابت کنیم $OH = OH'$ و بر عکس (شکل را ببینید).

از نقطه‌ی O مرکز دایره، عمودهای OH و OH' را به ترتیب بر وترهای AB و CD رســم می‌کنیم. در دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی OAH و OCH' بنابر قضیه‌ی فیثاغورس،

$$OA^2 = OH^2 + AH^2 \,, \quad OC^2 = OH'^2 + CH'^2$$

یعنی

$$R^2 = OH^2 + \frac{AB^2}{4} \,, \quad R^2 = OH'^2 + \frac{CD^2}{4}$$

چون $AB = CD$، پس

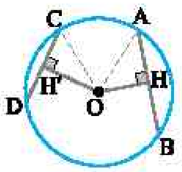
$$OH^2 = R^2 - \frac{AB^2}{4} = R^2 - \frac{CD^2}{4} = OH'^2$$

در نتیجه

$$OH = OH'$$

با عمل بازگشتی می‌توان عکس این مطلب را ثابت کرد.

مسئله ۱۷ **ثابت کنید در یک دایره، اگر دو وتر نامســاوی باشــند، آن‌گاه وتری که بزرگ‌تر است، به مرکز دایره نزدیک‌تر است.**



راه‌حل: در شکل روبه‌رو فرض می‌کنیم $AB > CD$.

از O مرکــز دایره، عمودهای OH و OH' را به ترتیب بر وترهای AB و CD رسم کرده‌ایم.

می‌خواهیم ثابت کنیم

$$OH < OH'$$

می‌دانیم اگر از مرکز دایره عمودی بر وتر رسم کنیم، آن وتر را نصف می‌کند، پس

$$AH = \frac{1}{2} AB \,, \quad CH' = \frac{1}{2} CD$$

بنابر قضیه‌ی فیثاغورس در دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی OAH و OCH'،

$$AH^2 = OA^2 - OH^2 \,, \quad CH'^2 = OC^2 - OH'^2$$

یعنی

$$\frac{AB^2}{4} = R^2 - OH^2 \,, \quad \frac{CD^2}{4} = R^2 - OH'^2$$

چون $AB > CD$ پس $AB^2 > CD^2$، در نتیجه

$$R^2 - OH^2 > R^2 - OH'^2$$

$$-OH^2 > -OH'^2$$

پس

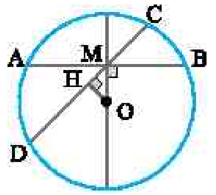
$$OH^2 < OH'^2$$

بنابراین

$$OH < OH'$$

توجه دقت کنید که عکس مطلب بیان شده در مسئله‌ی بالا درست است.

مسئله ۱۸ **ثابت کنید کوچک‌ترین وتری که از یک نقطه واقع در درون یک دایره می‌توان رسم کرد، وتری است که بر قطر گذرنده از آن نقطه عمود است.**

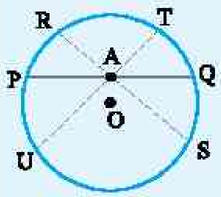


راه‌حل: نقطه‌ی M درون دایره به مرکز O را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم ثابت کنیم وتر AB که بر قطر گذرنده از OM عمود است کوتاه‌ترین وتر گذرنده از M است. برای اثبات این موضوع وتر دلخواه CD را از نقطه‌ی M عبور می‌دهیم و عمود OH را بر این وتر وارد می‌کنیم. می‌دانیم وتری که به مرکز دایره نزدیک‌تر باشد، بزرگ‌تر است. پس

مثلث قائم‌الزاویه $OMH: OM > OH \Rightarrow AB < CD$

بنابراین AB کوتاه‌ترین وتر گذرنده از M است. به AB وتر مینیمم گذرنده از M می‌گویند.

نتیجه



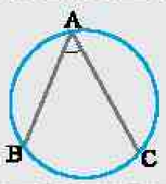
در مورد تعداد وترهــای گذرنده از نقطه‌ی A درون دایره‌ی $C(O, R)$ می‌توان گفت:

۱- فقط یک وتر به طول ۲R وجود دارد. (قطر گذرنده از A)

۲- فقــط یک وتر با طول مینیمم (L_{min}) وجود دارد. (وتر عمود بر قطر گذرنده از A)

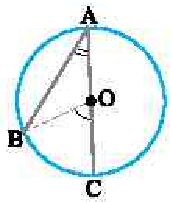
۳- دو وتــر بــه طــول L، با انــدازه‌ای بین انــدازه‌ی وتر مینیمــم و قطر $(L_{min} < L < ۲R)$ وجود دارد مانند وترهای RS و TU در شکل.

یادآوری:



۷) زاویــه‌ی محاطی: زاویه‌ای کــه رأس آن روی دایره و ضلع‌های آن دو وتر از دایره باشند، زاویه‌ی محاطی می‌نامند.
مثلاً، زاویه‌ی BAC در شکل روبه‌رو، محاطی است.

قضیه **اندازه‌ی هر زاویه‌ی محاطی برابر نصف کمان روبه‌روی آن است.**



اثبات: اثبات را در سه حالت می‌آوریم.

حالت اول در دایره‌ی به مرکز O، زاویه‌ی محاطی BAC را که ضلع AC در آن، قطر دایره اســت در نظر می‌گیریم (شکل را ببینید). از نقطه‌ی B به O مرکز دایره وصل می‌کنیم.

مثلث OAB متساوی‌الساقین است $(OA = OB = \text{شعاع})$، پس

$$O\hat{A}B = O\hat{B}A$$

زاویه‌ی مرکزی BOC زاویه‌ی خارجی مثلث متساوی‌الساقین OAB است. در نتیجه

$$B\hat{O}C = O\hat{A}B + O\hat{B}A = O\hat{A}B + O\hat{A}B = ۲O\hat{A}B$$

یعنی

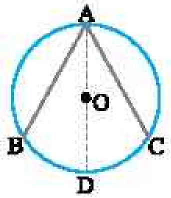
$$O\hat{A}B = \frac{۱}{۲} B\hat{O}C \quad (۱)$$

از طرف دیگر،

$$B\hat{O}C = \overset{\frown}{BC} \quad (۲)$$

با مقایسه‌ی تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم

$$B\hat{A}C = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$$



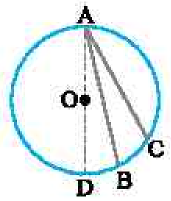
حالت دوم در شکل روبه‌رو زاویه‌ی BAC یک زاویه‌ی محاطی است که دو ضلع آن در دو طرف O مرکز دایره قرار دارند.
قطر AD را رسم می‌کنیم. با توجه به حالت اول،

$$B\hat{A}D=\frac{\overset{\frown}{BD}}{۲}$$

$$D\hat{A}C=\frac{\overset{\frown}{DC}}{۲}$$

با جمع کردن دو طرف تساوی‌های بالا، نتیجه می‌شود

$$B\hat{A}C=\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{BD}+\overset{\frown}{DC})=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{BC}$$



حالت سوم در شکل روبه‌رو زاویه‌ی BAC یک زاویه‌ی محاطی است که دو ضلع آن در یک طرف O مرکز دایره قرار گرفته‌اند.
قطر AD را رسم می‌کنیم. با توجه به حالت اول،

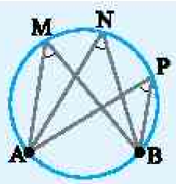
$$D\hat{A}C=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{DC}$$

$$D\hat{A}B=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{DB}$$

با کم کردن دو طرف تساوی‌های بالا نتیجه می‌شود

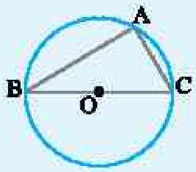
$$B\hat{A}C=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{DC}-\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{DB}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{BC}$$

نتیجه



۱) در هر دایره، اندازه‌ی زاویه‌های محاطی روبه‌روی یک کمان، با هم برابرند.
در شکل روبه‌رو، اندازه‌ی زاویه‌های M، N و P با هم برابر است، چون همگی مقابل به یک کمان هستند

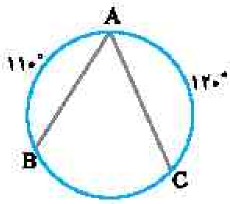
$$\hat{M}=\hat{N}=\hat{P}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AB}$$



۲) زاویه‌ی محاطی روبه‌رو به قطر دایره ۹۰° است. چون قطر دایره، دایره را به دو کمان ۱۸۰° تقسیم می‌کند.
به عبارت دیگر، در شکل روبه‌رو، اگر BC قطر دایره باشد، آن‌گاه

$$B\hat{A}C=\frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}=\frac{۱۸۰^\circ}{۲}=۹۰^\circ$$

مسئله ۱۹ **در دایره‌ی شکل مقابل، اندازه‌ی زاویه‌ی A را به‌دست آورید.**



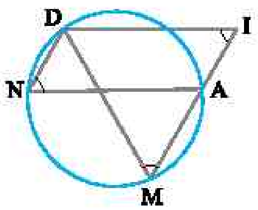
راه‌حل: دایره در حالت کلی کمانی با اندازه‌ی ۳۶۰ درجه است. از این مطلب استفاده کرده و اندازه‌ی کمان BC را به‌دست می‌آوریم.

$$\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BC}=۳۶۰^\circ \Rightarrow ۱۱۰^\circ+۱۲۰^\circ+\overset{\frown}{BC}=۳۶۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BC}=۱۳۰^\circ$$

از طرفی می‌دانیم اندازه‌ی یک زاویه‌ی محاطی نصف کمان مقابلش است، پس

$$\hat{A}=\frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}=\frac{۱۳۰^\circ}{۲}=۶۵^\circ$$

مسئله ۲۰ در شکل روبه‌رو چهارضلعی DIAN متوازی‌الاضلاع است و نقطه‌های I ، A و M روی یک خط راست قرار دارند. ثابت کنید $DM = DI$.



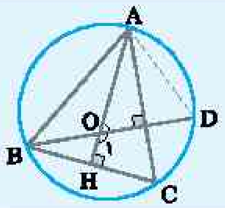
راه‌حل: در متوازی‌الاضلاع زاویه‌های روبه‌رو به هم مساوی‌اند پس $\hat{N} = \hat{I}$. از طرفی دو زاویه‌ی M و N محاطی روبه‌روی یک کمان هستند، در نتیجه $\hat{M} = \hat{N}$. بنابراین در مثلث DIM ، $\hat{M} = \hat{I}$. پس

$$DM = DI$$

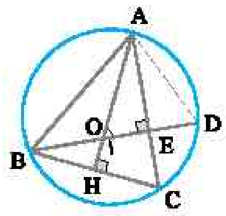
تست ۳ در شکل روبه‌رو O محل تلاقی ارتفاع‌های مثلث ABC است.
زاویه‌ی AOD برابر کدام است؟

۱) $O\hat{B}C$ ۲) $C\hat{A}D$

۳) $O\hat{A}C$ ۴) $A\hat{D}O$



پاسخ، مطابق شکل زیر در چهارضلعی OHCE دو زاویه قائمه هستند،
بنابراین دو زاویه‌ی O_1 و C مکمل‌اند، بنابراین می‌توان نوشت



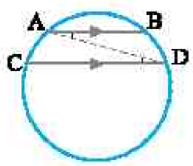
$$\begin{cases} \hat{O}_1 + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \\ A\hat{O}D + \hat{O}_1 = ۱۸۰^\circ \end{cases} \Rightarrow A\hat{O}D = \hat{C}$$

از طرفی دو زاویه‌ی C و ADB محاطی روبه‌روی یک کمان هستند، پس مساوی‌اند. در نتیجه

$$A\hat{O}D = A\hat{D}O$$

بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

مسئله ۲۱ ثابت کنید کمان‌های محصور بین دو وتر موازی از یک دایره برابرند.



راه‌حل: در شکل روبه‌رو $AB \| CD$. می‌خواهیم ثابت کنیم

$$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$$

وتر AD را رسم می‌کنیم. چون $AB \| CD$ و AD مورب است، پس

$$A\hat{D}C = D\hat{A}B$$

در نتیجه

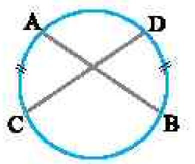
$$\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AC} = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{BD}$$

پس

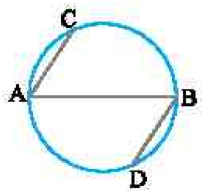
$$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$$

توجه این مسئله را به عنوان نکته در خاطر داشته باشید.

تذکر دقت کنید، عکس مسئله‌ی بالا لزوماً درست نیست. یعنی در شکل روبه‌رو دو کمان AC و BD با هم برابرند، اما وترهای AB و CD موازی نیستند.



مسئله ۲۲ در شکل زیر AB قطری از دایره است و وترهای AC و BD موازی‌اند. ثابت کنید $AC=BD$.



راه‌حل: چون AB قطر دایره است، پس

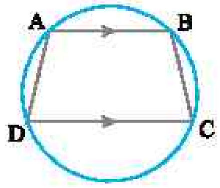
$$\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BD}+\overset{\frown}{AD}=۱۸۰^\circ \quad (۱)$$

از طرف دیگر کمان‌های محصور بین دو وتر موازی، مساوی‌اند، پس

$$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{AD} \quad (۲)$$

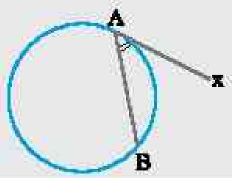
با کم کردن تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$. می‌دانیم، وترهای نظیر کمان‌های برابر در یک دایره با هم مساوی‌اند، پس $AC=BD$.

مسئله ۲۳ اگر رأس‌های ذوزنقه‌ای بر روی یک دایره باشند، ثابت کنید ذوزنقه متساوی‌الساقین است.



راه‌حل: فرض می‌کنیم رأس‌های ذوزنقه‌ی $ABCD$ روی یک دایره باشند، در این‌صورت چون دو وتر AB و CD موازی‌اند، بنابراین کمان‌های BC و AD مساوی‌اند. می‌دانیم اگر دو کمان از یک دایره با هم مساوی باشند وترهای نظیر آن‌ها نیز با هم مساوی‌اند، پس $AD=BC$. بنابراین ذوزنقه‌ی $ABCD$ متساوی‌الساقین است.

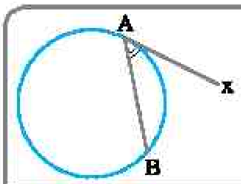
تعریف زاویه‌ی ظلی: زاویه‌ای را که رأسش روی دایره است، یک ضلعش وتر دایره و ضلع دیگرش بر دایره مماس است، زاویه‌ی ظلی می‌نامند.
مثلاً، در شکل روبه‌رو زاویه‌ی $B\hat{A}x$ زاویه‌ی ظلی است.



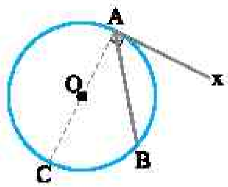
تذکر کمانی از دایره را که درون زاویه‌ی ظلی قرار دارد، کمان نظیر یا کمان روبه‌رو به زاویه‌ی ظلی می‌نامیم.
مثلاً، در شکل بالا کمان AB، کمان نظیر زاویه‌ی ظلی BAx است.

قضیه اندازه‌ی هر زاویه‌ی ظلی برابر با نصف کمان روبه‌روی آن است. به عبارت دیگر، در شکل روبه‌رو اگر BAx زاویه‌ی ظلی باشد، آن‌گاه

$$B\hat{A}x=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$$



اثبات: روش اول قطر AC را رسم می‌کنیم (شکل را ببینید).
چون شعاع دایره در نقطه‌ی تماس بر خط مماس عمود است، پس $C\hat{A}x=۹۰^\circ$. می‌توان نوشت



$$C\hat{A}x=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{ABC} \quad (۱)$$

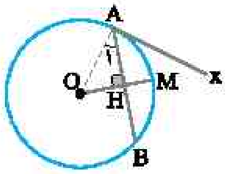
زاویه‌ی CAB، زاویه‌ای محاطی است، بنابراین

$$C\hat{A}B=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{CB} \quad (۲)$$

با استفاده از شکل و تساوی‌های (۱) و (۲) می‌توان نوشت

$$B\hat{A}x=C\hat{A}x-C\hat{A}B=۹۰^\circ-\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{CB}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{ABC}-\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{CB}$$

$$=\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{ABC}-\overset{\frown}{CB})=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AB}$$



روش دوم از مرکز دایره، شعاع OM را عمود بر وتر AB رسم می‌کنیم تا این وتر را در نقطه‌ی H قطع کند (شکل را ببینید).
می‌دانیم شـــعاع عمود بر وتر، کمـــان نظیر آن وتر را نصف می‌کند، یعنی

$$\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{MB}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AMB} \quad (1)$$

شـــعاع OA را رسم می‌کنیم. می‌دانیم شـــعاع دایره در نقطه‌ی تماس بر خط مماس عمود است، یعنی

$$OA \perp Ax \quad \text{یا} \quad O\hat{A}x=90^\circ$$

چون زاویه‌های BAx و AOM متمم‌های زاویه‌ی A_1 هستند، پس با هم برابرند،

$$B\hat{A}x=A\hat{O}M \quad (2)$$

زاویه‌ی AOM مرکزی است، در نتیجه

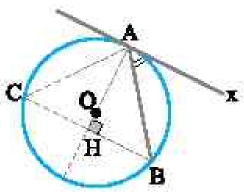
$$A\hat{O}M=\overset{\frown}{AM}$$

اکنون تساوی (۲) را این‌گونه می‌نویسیم

$$B\hat{A}x=\overset{\frown}{AM}$$

با توجه به تساوی (۱)،

$$B\hat{A}x=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AMB}$$



روش ســـوم از نقطه‌ی B خطی موازی Ax رســـم می‌کنیم تا دایـــره را در نقطه‌ی C قطع کند. محل برخورد قطر گذرنده از A با وتر BC را H می‌نامیم (شکل را ببینید).
OA بر Ax عمود است و Ax با BC موازی است، پس AH بر BC عمود است.
می‌دانیم اگر از مرکز دایره، عمودی بر یک وتر رسم کنیم، آن وتر نصف می‌شود، یعنی

$$BH=CH$$

در مثلث ABC، ارتفاع AH، میانه هم است، پس مثلث ABC متساوی‌الساقین است، یعنی

$$\hat{B}=\hat{C}$$

از طرف دیگر

$$Ax \parallel BC$$

و AB مورب است، بنابراین

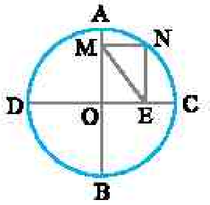
$$B\hat{A}x=\hat{B}$$

اکنون می‌توان نوشت

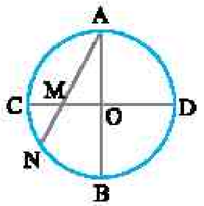
$$B\hat{A}x=\hat{C}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$$

تذکر در اثبات‌های بالا، حالتی از زاویه‌ی ظلی را در نظر گرفتیم که مرکز دایره بیرون زاویه قرار دارد. برای اثبات کامل‌تر، باید مانند زاویه‌ی محاطی که آن را در سه حالت بررسی کردیم، زاویه‌ی ظلی را نیز در سه حالت بررسی کنیم (حالتی که مرکز دایره روی یک ضلع است و حالتی که مرکز دایره داخل زاویه است). البته کتاب درسی این موارد را بررسی نکرده است، پس لازم نیست شما آن‌ها را در امتحان‌ها بررسی کنید. اما بد نیست به عنوان تمرین آن‌ها را ثابت کنید.

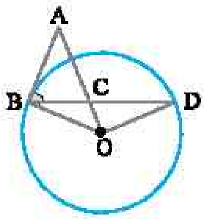
تمرین



۱- در دایره‌ی مقابل قطرهای AB و CD بر هم عمودند و $MNEO$ مستطیل است. اگر $ME=6$ باشد، شعاع دایره را به دست آورید.

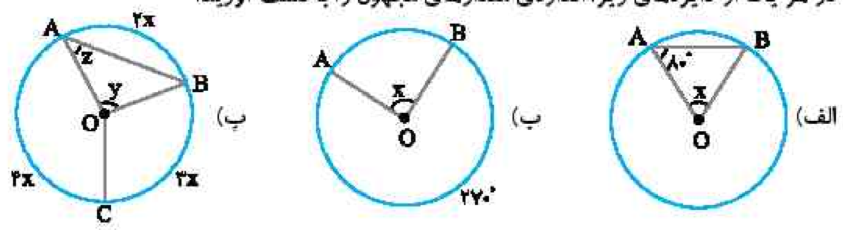


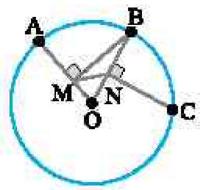
۲- اگر دو قطر AB و CD بر هم عمود باشند و $OM=MN$، نشان دهید $AM=2MN$.



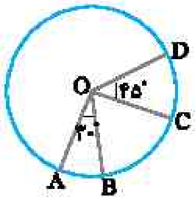
۳- مثلث متساوی‌الساقین ABC را در نظر گرفته، از B عمودی بر ساق AB خارج می‌کنیم تا امتداد AC را در O قطع کند. به مرکز O و شعاع OB دایره‌ای رسم می‌کنیم. این دایره امتداد BC را در D قطع می‌کند. ثابت کنید $A\hat{O}D=90^\circ$.

۴- در هر یک از دایره‌های زیر، اندازه‌ی مقدارهای مجهول را به‌دست آورید.

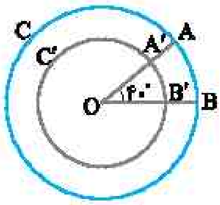




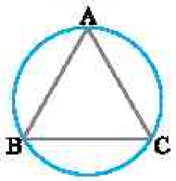
۵- در دایره به مرکز O دو کمان AB و BC مساوی‌اند. از B عمود BM را بر شعاع OA و از C عمود CN را بر شعاع OB رسم کرده‌ایم. ثابت کنید مثلث OMN متساوی‌الساقین است.



۶- در دایره‌ی $C(O,5)$ در شکل مقابل نسبت طول کمان CD به طول کمان AB را به‌دست آورید.



۷- در دو دایره‌ی $C(O,6)$ و $C'(O,4)$ طول کمان AB چقدر از طول کمان $A'B'$ بیشتر است؟



۸- در دایره‌ی شکل مقابل مثلث ABC مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۴ است. طول کمان BC را به‌دست آورید.

۹- دایره‌ی $C(O,۲۶)$ مفروض است. اگر طول وتر AB از این دایره برابر ۴۸ باشد، فاصله‌ی مرکز دایره از وتر AB را تعیین کنید.

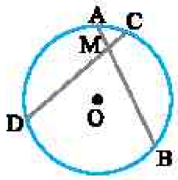
۱۰- ثابت کنید اگر خط راستی دو دایره‌ی هم‌مرکز را قطع کند، دو پاره‌خطی که بین دو دایره قرار دارند با یکدیگر برابرند.

۱۱- در دایره‌ی $C(O,R)$، $\widehat{AB}=۶۰^\circ$ و $AB=۱۰$. فاصله‌ی O از وتر AB را به‌دست آورید.

۱۲- در دایره‌ی $C(O,۱۳)$ اگر فاصله‌ی مرکز دایره از وتر AB مساوی ۵ و فاصله‌ی مرکز از وتر CD برابر ۱۲ باشد، نسبت $\frac{AB}{CD}$ را به‌دست آورید.

۱۳- در دایره‌ی به قطر BC وتر PQ با وتر BC زاویه‌ی ۴۵° می‌سازد و BC را در A قطع می‌کند. اگر شعاع دایره برابر R باشد، ثابت کنید

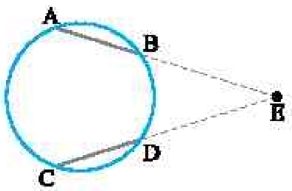
$$AP^۲+AQ^۲=۲R^۲$$



۱۴- مانند شکل، وترهای برابر AB و CD از دایره‌ی $C(O,R)$ یکدیگر را در نقطه‌ی M قطع کرده‌اند. ثابت کنید

الف) O روی نیمساز زاویه‌ی بین دو وتر است.

ب) $MD=MB$ و $AM=MC$



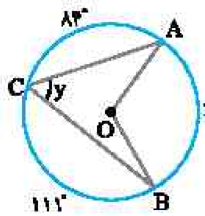
۱۵- مانند شکل، وترهای برابر و نامتقاطع AB و CD را امتداد می‌دهیم تا یکدیگر را در نقطه‌ی E قطع کنند. ثابت کنید $AE=CE$.

۱۶- نقطه‌ی M درون دایره‌ی $C(O\ ,\ R)$ قرار دارد. اگر طول کوتاه‌ترین و بلندترین وتر گذرنده از M به ترتیب ۴ و ۶ باشد، فاصله‌ی M از مرکز دایره را تعیین کنید.

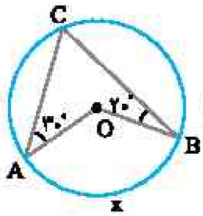
۱۷- نقطه‌ی M درون دایره‌ی $C(O,۸)$ از مرکز O به فاصله‌ی ۳ قرار دارد. اندازه‌ی کوتاه‌ترین وتر گذرنده از M را به‌دست آورید.

۱۸- در هر یک از دایره‌های زیر، اندازه‌ی مقدارهای مجهول را به‌دست آورید.

الف)

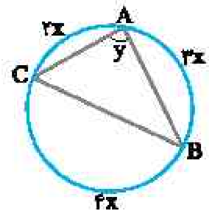


ب)

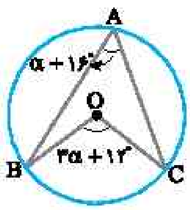


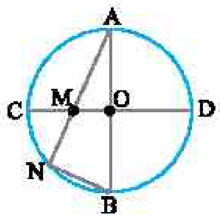
۱۹- در دایره‌های زیر به مرکز O مقدارهای مجهول را به‌دست آورید.

الف)



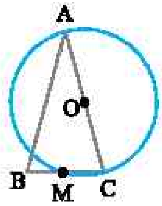
ب)



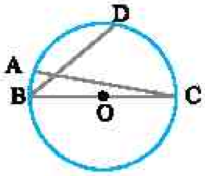


۲۰- در شکل روبه‌رو AB و CD دو قطر عمود بر هم از دایره هستند. وتر AN به گونه‌ای رسم شده است که $MN=NB$. اندازه‌ی زاویه‌ی A را به‌دست آورید.

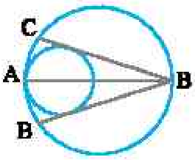
۲۱- در شکل مقابل AC قطر دایره و $AB = AC$ است. اگر قاعده‌ی BC دایره را در نقطه‌ی M قطع کند، ثابت کنید M وسط BC است.



۲۲- در شکل مقابل BC قطر دایره، D وسط کمان AC و $D\hat{B}C = 40^\circ$ است. اندازه‌ی زاویه‌ی ACB چند درجه است؟

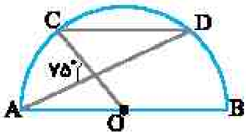


۲۳- دو دایره باهم در نقطه‌ی A مماس داخل هستند. قطر AB از دایره‌ی بزرگ‌تر را رسم می‌کنیم و از نقطه‌ی B دو مماس بر دایره‌ی کوچک‌تر رسم می‌کنیم تا دایره‌ی بزرگ‌تر را در نقطه‌های C و D قطع کند. ثابت کنید $BC = BD$.



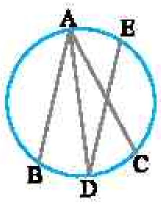
۲۴- مثلث ABC و دایره‌ی محیطی آن را در نظر می‌گیریم و ارتفاع CH و قطر AD از دایره‌ی محیطی را رسم می‌کنیم. ثابت کنید DB با CH موازی است.

۲۵- در شکل روبه‌رو، O مرکز نیم‌دایره است و $AB \parallel CD$. اندازه‌ی کمان CD را به‌دست آورید.



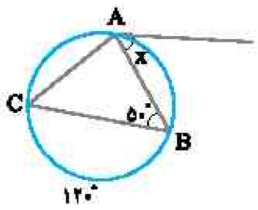
۲۶- در دایره‌ی به قطر AB وتر CD را موازی AB رسم می‌کنیم. ثابت کنید $|A\hat{C}D - A\hat{D}C| = 90^\circ$.

۲۷- در دایره‌ی شکل مقابل AD نیمساز زاویه‌ی BAC است. اگر وتر DE موازی AB باشد، ثابت کنید $AC = DE$

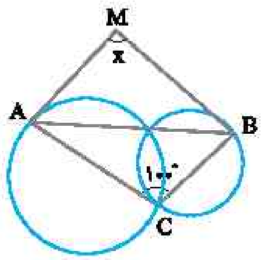


۲۸- ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین $ABCD$ $(AD = BC)$ را در نظر می‌گیریم، به مرکز O وسط قاعده‌ی بزرگ‌تر DC و به شعاع OA دایره‌ای رسم می‌کنیم تا خط DC را در نقطه‌های E و F قطع کند. ثابت کنید $DF = EC$ و $AF = BE$.

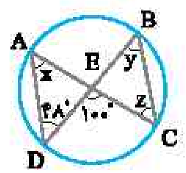
۲۹- در دایره‌ی زیر به مرکز O مقدار مجهول را به‌دست آورید.



۳۰- در شکل زیر، زاویه‌ی x را به‌دست آورید.



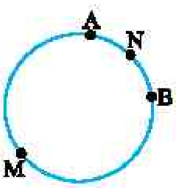
۳۱- در دایره‌ی زیر به مرکز O مقدارهای مجهول را به‌دست آورید.



پرسش‌های چهارگزینه‌ای

فصل اول

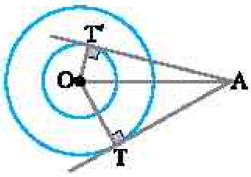
درس اول:
مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره



۱- در شکل مقابل اگر $\widehat{AMB}=۴\widehat{ANB}$ ، کمان ANB چه کسری از محیط دایره است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$

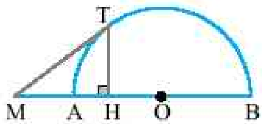
۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$



۲- مطابق شکل دو دایره‌ی هم‌مرکز به شعاع‌های ۲ و ۴ مفروض‌اند. از نقطه‌ی A دو مماس بر دو دایره رسم شده است. تفاضل مربعات طول این دو مماس چقدر است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲

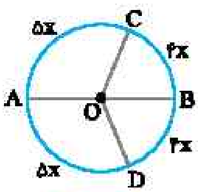
۳) ۱۶ ۴) ۲۰



۳- در نیم‌دایره‌ی شکل مقابل $AB=۳$ و $AM=۱$. اگر MT بر نیم‌دایره مماس باشد، طول پاره خط MH چقدر است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۱/۶

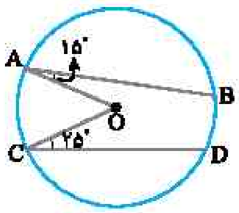
۳) ۱/۴ ۴) ۱/۸



۴- در شکل مقابل AB قطر دایره و O مرکز آن است. اندازه‌ی زاویه‌ی COD کدام است؟

۱) ۱۶۰° ۲) ۱۵۰°

۳) ۱۴۰° ۴) ۱۳۰°



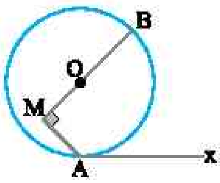
۵- در شکل مقابل، اندازه‌ی $\widehat{BD}+\widehat{AC}$ چند درجه است؟ (O مرکز دایره است)

۱) ۷۵

۲) ۸۰

۳) ۹۰

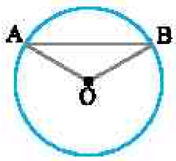
۴) ۱۱۰



۶- در شکل مقابل $x\hat{A}M=۱۳۵^\circ$ ، کمان کوچک‌تر AB چه نسبتی از محیط دایره است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۳}{۸}$



۷- در شکل مقابل شعاع دایره برابر ۳ و طول کمان کوچک‌تر AB برابر ۲π است. اندازه‌ی وتر AB چقدر است؟

۱) ۴

۲) ۴/۵

۳) $۳\sqrt{۳}$

۴) $\sqrt{۳}$

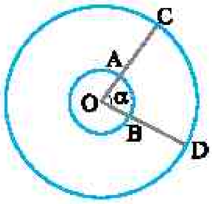
۸- در دایره‌ی $C(O,R)$ طول وتر AB برابر R است. طول کمان کوچک‌تر AB برابر کدام است؟

۱) πR ۲) $\frac{\pi}{2}R$ ۳) $\frac{\pi}{3}R$ ۴) $\frac{2\pi}{3}R$

۹- طول کمان 60° از دایره‌ی $C(O\,,R)$ با طول کمان 15° از دایره‌ی $C'(O',R')$ برابر است. نسبت مساحت دایره‌ی C به مساحت دایره‌ی C' کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{16}$ ۴) $\frac{1}{8}$

۱۰- در دو دایره‌ی هم‌مرکز شکل مقابل $OC = 3OA = 12$. اگر طول کمان AB برابر با ۸ واحد باشد، طول کمان CD کدام است؟



۱) ۱۲ ۲) ۱۸
۳) ۲۴ ۴) ۲۸

۱۱- بر وسط شعاعی از یک دایره یک وتر عمود می‌کنیم. اندازه‌ی کمان کوچک‌تر ایجاد شده توسط این وتر در دایره چند درجه است؟

۱) ۶۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۵۰ ۴) ۹۰

۱۲- دو دایره‌ی هم‌مرکز به شعاع‌های ۵ و ۱۳ واحد رسم شده‌اند. طول وتری از دایره‌ی بزرگ که بر دایره‌ی کوچک مماس شده است، چند واحد است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۴

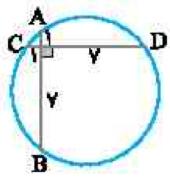
۱۳- دایره‌ی $C(O\,,10)$ و نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۱۲ از مرکز دایره مفروض‌اند. از نقطه‌ی A دو خط رسم کرده‌ایم که در دایره‌ی C وترهایی به طول ۱۶ ایجاد کرده‌اند. زاویه‌ی بین این دو خط کدام است؟

۱) 30° ۲) 45° ۳) 60° ۴) 90°

۱۴- طول ضلع مربع $ABCD$ برابر با ۴ است. دایره‌ای از رأس‌های A و D گذشته و بر BC مماس شده است. شعاع این دایره کدام است؟

۱) $5\sqrt{2}$ ۲) ۵ ۳) ۲/۵ ۴) $2/5\sqrt{2}$

۱۵- مطابق شکل مقابل، دو وتر AB و CD بر هم عمودند. اندازه‌ی شعاع این دایره چقدر است؟

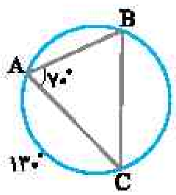


۱) $3\sqrt{2}$
۲) ۵
۳) $4\sqrt{2}$
۴) ۶

۱۶- دایره‌ی $C(O\,,4)$ و نقطه‌ی M به فاصله‌ی ۱ از مرکز دایره مفروض است. چند وتر داخل دایره می‌توان رسم کرد که طول آن ۲ باشد و از M بگذرد؟

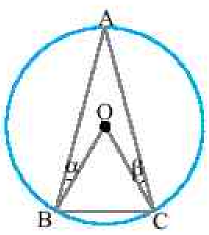
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) بی‌شمار

۱۷- در شکل مقابل اندازه‌ی زاویه‌ی C کدام است؟

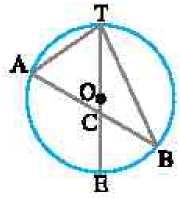


۱) 70°
۲) 60°
۳) 65°
۴) 45°

۱۸- در شکل مقابل مثلث OBC متساوی‌الاضلاع است. حاصل $\alpha+\beta$ کدام است؟ (O مرکز دایره)



۱) 10°
۲) 20°
۳) 30°
۴) 40°



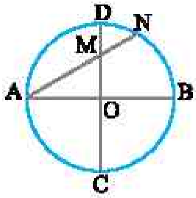
۱۹- در شکل مقابل TE قطر دایره است. اگر $\hat{A}=65^\circ$ و $\hat{B}=35^\circ$، زاویه‌ی ACT چند درجه است؟

۱) ۶۰

۲) ۶۱

۳) ۶۲

۴) ۶۳



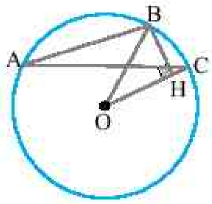
۲۰- در دایره‌ی شکل مقابل قطرهای AB و CD بر هم عمودند. هنگامی‌که زاویه‌ی A افزایش یابد، حاصل‌ضرب $AM\times AN$ به چه صورتی تغییر می‌کند؟ (R شعاع دایره است)

۱) افزایش می‌یابد.

۲) مقدار ثابت $2R^2$ است.

۳) مقدار ثابت $4R^2$ است.

۴) کاهش می‌یابد.



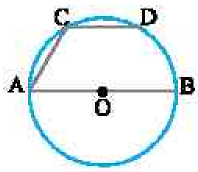
۲۱- در دایره‌ی $C(O, R)$ اگر $B\hat{A}C=18^\circ$، $O\hat{B}H$ کدام است؟

۱) ۷۲°

۲) ۳۶°

۳) ۵۴°

۴) ۱۸°



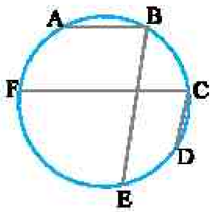
۲۲- در دایره‌ای به قطر AB، وتر CD را موازی AB رسم کرده‌ایم، به‌طوری‌که $\overset{\frown}{CD}=60^\circ$، اندازه‌ی زاویه‌ی ACD کدام است؟

۱) ۱۰۰°

۲) ۱۲۰°

۳) ۱۳۰°

۴) ۱۳۵°



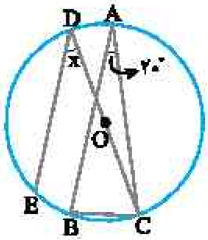
۲۳- در شکل مقابل، $AB||FC$، $CD||BE$، کمان AB برابر با ۶۰°، کمان CD برابر ۴۰° و کمان EF برابر با ۱۱۰° است. اندازه‌ی زاویه‌ی FCD کدام است؟

۱) ۹۰°

۲) ۵۵°

۳) ۷۰°

۴) ۸۰°



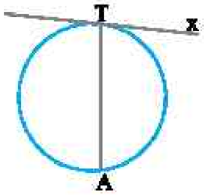
۲۴- مثلث متساوی‌الساقین $ABC(AB=AC)$ در دایره‌ی به مرکز O محاط شده است. اگر $AB||DE$، اندازه‌ی زاویه‌ی x کدام است؟

۱) ۳۰°

۲) ۴۰°

۳) ۳۵°

۴) ۴۵°



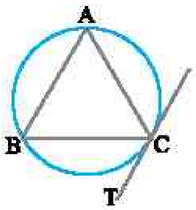
۲۵- اگر اندازه‌ی زاویه‌ی ظلی ATx مساوی $(2\alpha-6)^\circ$ و اندازه‌ی کمان کوچک‌تر AT برابر با $(3\alpha+33)^\circ$ باشد، مقدار α چند درجه است؟

۱) ۳۶

۲) ۴۰

۳) ۴۲

۴) ۴۵



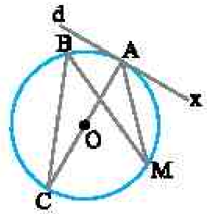
۲۶- در شکل روبه‌رو، $AB=AC$ و CT در نقطه‌ی C بر دایره مماس و $\overset{\frown}{AC}=120^\circ$ است. اندازه‌ی زاویه‌ی BCT چند درجه است؟

۱) ۵۰

۲) ۶۰

۳) ۵۵

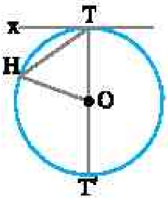
۴) ۶۵



۲۷- در شکل روبه‌رو خط d در نقطه‌ی A بر دایره به قطر AC مماس است. اگر زاویه MAx برابر ۴۴° باشد، اندازه‌ی زاویه‌ی B کدام است؟

۱) ۴۲° ۲) ۴۴°

۳) ۴۶° ۴) ۴۸°



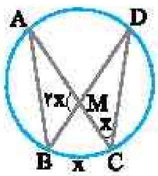
۲۸- در شکل مقابل، از نقطه‌ی T روی محیط دایره مماس Tx و قطر TT′ را رسم می‌کنیم. اگر زاویه‌ی xTH برابر با ۳۵° باشد، زاویه‌ی HOT′ چند درجه است؟

۱) ۹۵ ۲) ۱۰۰

۳) ۱۰۵ ۴) ۱۱۰

۲۹- در دایره‌ای دو وتر با زاویه‌ی ۴۵ درجه متقاطع‌اند. دو کمانی که مقابل به این زاویه نیستند به نسبت‌های ۳ و ۲ هستند. اندازه‌ی بزرگ‌ترین کمان ایجاد شده توسط این دو وتر روی دایره کدام است؟

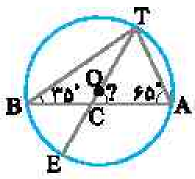
۱) ۱۵۴° ۲) ۱۶۲° ۳) ۱۸۴° ۴) ۱۹۲°



۳۰- در شکل مقابل مقدار x کدام است؟

۱) $(\frac{۱۸۰}{۱۱})^\circ$ ۲) ۴۵°

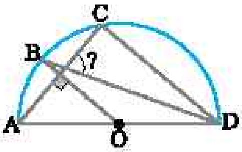
۳) $(\frac{۳۶۰}{۷})^\circ$ ۴) $(\frac{۱۲۳}{۵})^\circ$



۳۱- در شکل مقابل، O مرکز دایره است، $\hat{A}=۶۵^\circ$ و $\hat{B}=۳۵^\circ$، زاویه‌ی C کدام است؟

۱) ۶۰° ۲) ۶۱°

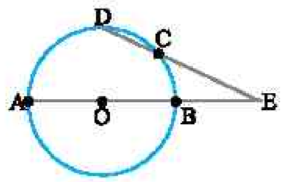
۳) ۶۲° ۴) ۶۳°



۳۲- در شکل مقابل AD قطر دایره و O مرکز دایره است. اگر $AC \perp BO$ و $D\hat{A}C=۵۰^\circ$، BD و AC با زاویه‌ی چند درجه یکدیگر را قطع می‌کنند؟

۱) ۶۰ ۲) ۷۰

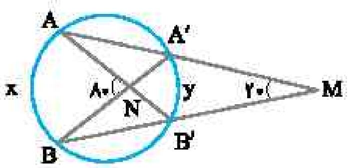
۳) ۷۵ ۴) ۸۰



۳۳- در شکل مقابل $\hat{E}=\overset{\frown}{CD}=۴۰^\circ$، اندازه‌ی کمان AD کدام است؟

۱) ۹۰° ۲) ۱۰۰°

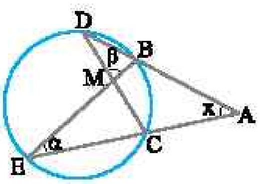
۳) ۱۰۵° ۴) ۱۱۰°



۳۴- در شکل مقابل نسبت $\frac{x}{y}$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۵}$ ۲) $\frac{۶}{۵}$

۳) $\frac{۷}{۳}$ ۴) $\frac{۵}{۳}$



۳۵- در شکل مقابل $\alpha=۳۰^\circ$ و $\beta=۸۰^\circ$، اندازه‌ی زاویه‌ی x کدام است؟

۱) ۲۵°

۲) ۳۰°

۳) ۴۰°

۴) ۴۵°

راه‌حل تمرین‌ها

فصل اول

دایره

۱ چون MNEO مستطیل است و در مستطیل قطرها با هم برابرند، پس $ON=ME=6$ ،ON همان شعاع دایره است.

۲ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم که در آن O را به N وصل کرده‌ایم. فرض می‌کنیم $N\hat{A}B=x$. چون مثلث OAN متساوی‌الساقین است، پس $\hat{N}=\hat{A}=x$. از طرف دیگر، بنابر فرض مسئله، چون $OM=MN$، پس $M\hat{O}N=\hat{N}=x$.
اکنون در مثلث AON می‌توان نوشت

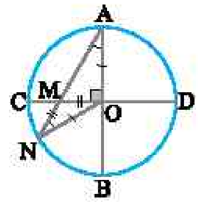
$$\hat{A}+\hat{N}+A\hat{O}N=180^\circ$$

یعنی

$$x+x+90^\circ+x=180^\circ$$

پس $x=30^\circ$، یعنی $\hat{A}=30^\circ$. می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه ضلع مقابل به زاویه‌ی 30° نصف وتر است، پس در مثلث قائم‌الزاویه‌ی AOM،

$$OM=\frac{1}{2}AM \quad \text{یا} \quad AM=2OM=2MN$$



۳ چون $OB=OD$، پس

$$\hat{D}=D\hat{B}O$$

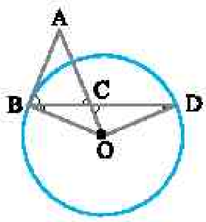
از طرف دیگر، $O\hat{C}D=A\hat{C}B=A\hat{B}C$. بنابر فرض مسئله،

$$A\hat{B}C+D\hat{B}O=90^\circ$$

پس

$$O\hat{C}D+\hat{D}=90^\circ$$

بنابراین چون در مثلث OCD مجموع دو زاویه برابر 90° است، پس زاویه‌ی سوم، یعنی AOD، هم برابر 90° است.



۴ الف) $OA=OB=R$، پس مثلث OAB متساوی‌الساقین است و $\hat{A}=\hat{B}=80^\circ$. در نتیجه

$$x=180^\circ-(\hat{A}+\hat{B})=180^\circ-(80^\circ+80^\circ)=20^\circ$$

ب) توجه کنید که $\overset{\frown}{AB}=360^\circ-270^\circ=90^\circ$. زاویه‌ی AOB مرکزی است، پس $A\hat{O}B=\overset{\frown}{AB}=90^\circ$.

پ) توجه کنید که $2x+3x+4x=360^\circ$، پس $x=40^\circ$. زاویه‌ی AOB مرکزی است، پس $y=2x=80^\circ$. مثلث OAB متساوی‌الساقین است $(OA=OB=R)$، پس

$$z=\frac{180^\circ-y}{2}=50^\circ$$

۵ از O به C وصل می‌کنیم. زاویه‌های AOB و BOC مرکزی هستند، پس

$$A\hat{O}B=\overset{\frown}{AB}\,,\ B\hat{O}C=\overset{\frown}{BC}$$

بنابر فرض مسئله، $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}$، پس

$$A\hat{O}B=B\hat{O}C$$

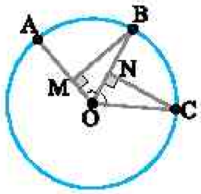
یعنی

$$M\hat{O}B=N\hat{O}C$$

همچنین $OB=OC=R$. بنابراین دو مثلث ONC و OMB به حالت وتر و یک زاویه‌ی حاده همنهشت هستند. در نتیجه

$$OM=ON$$

یعنی مثلث OMN متساوی‌الساقین است.



۶ طول کمان در دایره از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید

$$\frac{\text{اندازه کمان}}{360^\circ}=\frac{\text{طول کمان}}{2\pi R}\Rightarrow \text{طول کمان}=\frac{\text{اندازه کمان}}{360^\circ}(2\pi R)$$

بنابراین

$$\text{CD طول کمان}=\frac{45^\circ}{360^\circ}(2\pi\times5)=\frac{1}{8}(10\pi)=\frac{5\pi}{4}$$

$$\text{AB طول کمان}=\frac{30^\circ}{360^\circ}(2\pi\times5)=\frac{1}{12}(10\pi)=\frac{5\pi}{6}$$

پس نسبت خواسته شده برابر است با

$$\frac{\text{طول کمان } CD}{\text{طول کمان } AB}=\frac{\frac{۵\pi}{۴}}{\frac{۵\pi}{۶}}=\frac{۶}{۴}=\frac{۳}{۲}$$

نتیجه: توجه کنید نسبت طول کمان‌های یک دایره مساوی نسبت اندازه‌های آن‌ها است.

۷ طول کمان‌های AB و A'B' را به صورت زیر به‌دست می‌آوریم.

$$\text{طول کمان}=\frac{\text{اندازه کمان}}{۳۶۰^\circ}(۲\pi R)$$

بنابراین

$$\text{طول کمان } AB=\frac{۴۰^\circ}{۳۶۰^\circ}(۲\pi\times ۶)=\frac{۱}{۹}(۱۲\pi)=\frac{۴\pi}{۳}$$

$$\text{طول کمان } A'B'=\frac{۴۰^\circ}{۳۶۰^\circ}(۲\pi\times ۴)=\frac{۱}{۹}(۸\pi)=\frac{۸\pi}{۹}$$

از تفاضل اندازه‌های به‌دست آمده به جواب مسئله می‌رسیم.

$$\text{طول کمان } AB-\text{طول کمان } A'B'=\frac{۴\pi}{۳}-\frac{۸\pi}{۹}=\frac{۴\pi}{۹}$$

۸ زاویه‌های مثلث ABC هر کدام ۶۰° هستند. چون این زاویه‌ها در دایره‌ی محاطی هستند، پس کمان‌های AB، BC و AC در دایره هر کدام ۱۲۰° هستند. از مرکز دایره یعنی نقطه‌ی O به رأس‌های مثلث وصل می‌کنیم در این صورت $OA=OB=OC=R$، پس نقطه‌ی O محل تلاقی عمودمنصف‌های ضلع‌های مثلث ABC است. چون ABC مثلث متساوی‌الاضلاع است، پس O محل تلاقی نیمساز زاویه‌های مثلث ABC است، پس $\hat{A}_1=۳۰^\circ$. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OAH می‌نویسیم،

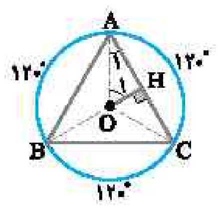
$$\hat{A}_1=۳۰^\circ\Rightarrow\hat{O}_1=۶۰^\circ\Rightarrow AH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}OA$$

$$\xrightarrow{AH=۲} OA=\frac{۴}{\sqrt{۳}}\Rightarrow R=\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$$

بنابراین

$$\text{طول کمان } BC=\frac{\text{اندازه‌ی کمان } BC}{۳۶۰^\circ}(۲\pi R)$$

$$=\frac{۱۲۰^\circ}{۳۶۰^\circ}\left(۲\pi\times\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}\right)=\frac{۱}{۳}\left(\frac{۸\pi\sqrt{۳}}{۳}\right)=\frac{۸\pi\sqrt{۳}}{۹}$$

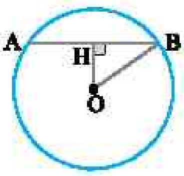


۹ مانند شکل از O عمود OH را بر وتر AB رسم می‌کنیم. این عمود وتر AB را نصف می‌کند، پس

$$BH=\frac{AB}{۲}=\frac{۴۸}{۲}=۲۴$$

اکنون در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OBH، بنابر قضیه‌ی فیثاغورس،

$$OH=\sqrt{OB^۲-BH^۲}=\sqrt{۲۶^۲-۲۴^۲}=۱۰$$



۱۰ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم که در آن O مرکز دو دایره است. از O خطی عمود بر Δ رسم می‌کنیم و فرض می‌کنیم H پای عمود باشد.

در دایره‌ی بزرگ‌تر چون OH بر وتر AD عمود است، پس از وسط آن می‌گذرد، یعنی

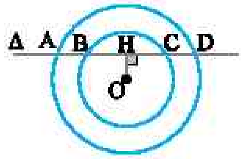
$$AH=DH \qquad (۱)$$

به همین ترتیب در دایره‌ی کوچک‌تر معلوم می‌شود

$$BH=CH \qquad (۲)$$

اکنون اگر برابری (۲) را از برابری (۱) کم کنیم نتیجه می‌شود

$$AB=CD$$



۱۱ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم که در آن از O عمود OH را بر وتر AB رسم کرده‌ایم. می‌خواهیم اندازه‌ی OH را به‌دست آوریم. چون مثلث OAB متساوی‌الساقین است $(OA=OB=R)$، پس ارتفاع OH نیمساز و میانه هم است، یعنی

$$B\hat{O}H=\frac{A\hat{O}B}{۲}=\frac{\widehat{AB}}{۲}=\frac{۶۰^\circ}{۲}=۳۰^\circ,\qquad BH=\frac{AB}{۲}=\frac{۱۰}{۲}=۵$$

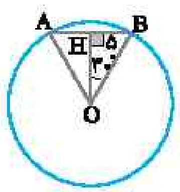
در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OBH، با توجه به تعریف نسبت‌های مثلثاتی،

$$\tan B\hat{O}H=\frac{BH}{OH}$$

یعنی

$$\tan ۳۰^\circ=\frac{۵}{OH}$$

پس $\frac{۱}{\sqrt{۳}}=\frac{۵}{OH}$، بنابراین $OH=۵\sqrt{۳}$.



۱۲ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم که در آن از O عمودهای OH و OH' را به ترتیب بر وترهای AB و CD رسم کرده‌ایم. در مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی OAH و ODH' بنابر قضیه‌ی فیثاغورس،

$$AH=\sqrt{OA^{۲}-OH^{۲}}=\sqrt{۱۳^{۲}-۵^{۲}}=۱۲$$

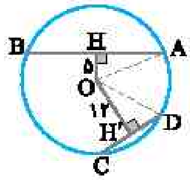
و

$$DH'=\sqrt{OD^{۲}-OH'^{۲}}=\sqrt{۱۳^{۲}-۱۲^{۲}}=۵$$

عمودهای OH و OH' به ترتیب از وسط وترهای AB و CD می‌گذرند، پس

$$AB=۲AH=۲۴\ ,\quad CD=۲DH'=۱۰$$

در نتیجه $\frac{AB}{CD}=\frac{۲۴}{۱۰}=۲/۴$.



۱۳ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم که در آن از O عمود OH را بر PQ رسم کرده‌ایم، H وسط PQ است، پس

$$PH=QH$$

اکنون می‌نویسیم

$$AP=PH+AH$$

و

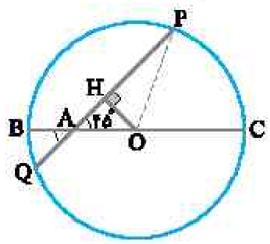
$$AQ=QH-AH=PH-AH$$

با توجه به این تساوی‌ها، می‌توان نوشت

$$AP^{۲}+AQ^{۲}=(PH+AH)^{۲}+(PH-AH)^{۲}$$
$$=۲(PH^{۲}+AH^{۲})$$

از طرف دیگر در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OAH، $H\hat{A}O=۴۵^\circ$، پس این مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است، بنابراین $AH=OH$. در نتیجه

$$AP^{۲}+AQ^{۲}=۲(PH^{۲}+OH^{۲})=۲OP^{۲}=۲R^{۲}$$



۱۴ الف) از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم که در آن عمودهای OH و OH' را به ترتیب بر وترهای AB و CD رسم کرده‌ایم.
چون AB و CD برابرند، پس فاصله‌ی مرکز دایره از AB و CD برابر است، یعنی $OH=OH'$ در نتیجه O روی نیمساز زاویه‌ی BMD است.

ب) از طرف دیگر مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی OMH و OMH' به حالت وتر و یک ضلع زاویه‌ی قائمه همنهشت‌اند، پس

$$MH=MH'$$

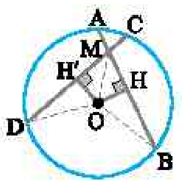
دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی OHB و $OH'D$ هم به حالت وتر و یک ضلع همنهشت‌اند، پس $BH=DH'$. در نتیجه

$$MH+BH=MH'+DH'$$

بنابراین $MB=MD$. همچنین

$$AB-MB=CD-MD$$

یعنی $AM=MC$.



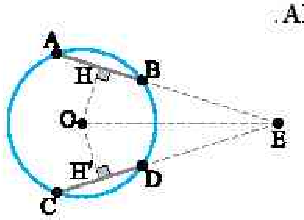
۱۵ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم که در آن O مرکز دایره است و OH و OH' به ترتیب بر AB و CD عمود هستند. چون وترهای AB و CD برابرند، پس $OH=OH'$. بنابراین مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی OHE و $OH'E$ همنهشت‌اند. در نتیجه $HE=H'E$. چون $AB=CD$ و

$$AH=\frac{AB}{۲}\ ,\ CH'=\frac{CD}{۲}$$

پس $AH=CH'$. در نتیجه

$$EH+AH=EH'+CH'$$

یعنی $AE=CE$.



۱۶ بلندترین وتر گذرنده از نقطه‌ی M قطر دایره است

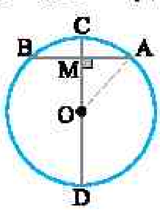
$$۲R=۶$$

پس $R=۳$. کوتاه‌ترین وترگذرنده از M وتری است که بر قطر گذرنده از M عمود باشد. در شکل زیر، وتر AB کوتاه‌ترین وتر گذرنده از M است $(AB=۴)$. M وسط AB است، پس

$$MA=\frac{AB}{۲}=۲$$

اکنون در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OAM، بنابر قضیه‌ی فیثاغورس،

$$OM=\sqrt{OA^{۲}-MA^{۲}}=\sqrt{۳^{۲}-۲^{۲}}=\sqrt{۵}$$

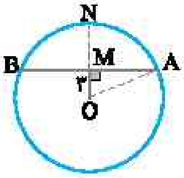


۱۷ کوچک‌ترین وتری که از نقطه‌ی M می‌گذرد، وتری است که بر شعاع گذرنده از M عمود باشد. بنابر شکل AB کوتاه‌ترین وتر گذرنده از M است. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OAM، بنابر قضیه‌ی فیثاغورس،

$$MA=\sqrt{OA^2-OM^2}=\sqrt{8^2-3^2}=\sqrt{55}$$

چون OM بر AB عمود است، پس از وسط وتر AB می‌گذرد، در نتیجه

$$AB=2AM=2\sqrt{55}$$



۱۸ **الف)** توجه کنید که $x+111^\circ+84^\circ=360^\circ$، پس $x=165^\circ$. زاویه‌ی ACB محاطی است، پس

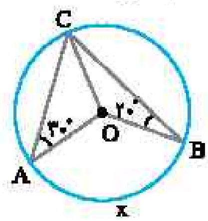
$$A\hat{C}B=\frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$$

یا $y=\frac{x}{2}=\frac{165^\circ}{2}=82/5^\circ$.

ب) از O به C وصل می‌کنیم. مثلث‌های OBC و OAC متساوی‌الساقین هستند، پس $O\hat{C}B=O\hat{B}C=20^\circ$ و $O\hat{C}A=O\hat{A}C=30^\circ$، یعنی $A\hat{C}B=50^\circ$. از طرف دیگر زاویه‌ی ACB محاطی است، پس

$$A\hat{C}B=\frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$$

یعنی $50^\circ=\frac{x}{2}$، پس $x=100^\circ$.



۱۹ **الف)** ابتدا توجه کنید

$$2x+4x+3x=360^\circ$$

پس $x=40^\circ$. همچنین

$$y=\frac{4x}{2}=2x=2\times 40^\circ=80^\circ$$

ب) توجه کنید که

$$B\hat{A}C=\frac{\overset{\frown}{BC}}{2}\,,\quad B\hat{O}C=\overset{\frown}{BC}$$

پس $B\hat{O}C=2B\hat{A}C$، یعنی

$$3\alpha+12^\circ=2(\alpha+16^\circ)$$

در نتیجه $\alpha=20^\circ$.

۲۰ زاویه‌ی ANB، محاطی مقابل به قطر است، پس

$$A\hat{N}B=90^\circ$$

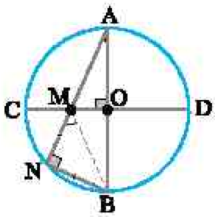
و چون $MN=NB$ پس

$$N\hat{M}B=45^\circ$$

مثلث MAB متساوی‌الساقین است و $N\hat{M}B$ زاویه‌ی خارجی آن است پس،

$$N\hat{M}B=\hat{A}+M\hat{B}A=\hat{A}+\hat{A}=2\hat{A}$$

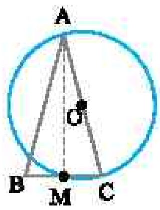
یعنی $45^\circ=2\hat{A}$ پس $\hat{A}=22/5^\circ$.



۲۱ مطابق شکل وتر AM را رسم می‌کنیم. توجه کنید که چون AC قطر دایره است، پس

$$A\hat{M}C=90^\circ \quad \text{(زاویه‌ی محاطی)}$$

یعنی AM ارتفاع مثلث متساوی‌الساقین ABC است. بنابراین AM میانه هم است، یعنی $BM=MC$.



۲۲ چون $\hat{B}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{DC}$، پس

$$\overset{\frown}{DC}=2\hat{B}=2\times 40^\circ=80^\circ$$

D وسط کمان AC است، بنابراین

$$\overset{\frown}{AC}=2\overset{\frown}{DC}=2\times 80^\circ=160^\circ$$

اکنون توجه کنید که چون BC قطر است، پس

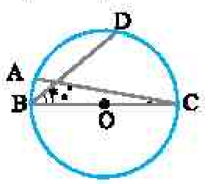
$$\overset{\frown}{BC}=180^\circ$$

و در نتیجه

$$\overset{\frown}{AB}=180^\circ-\overset{\frown}{AC}=180^\circ-160^\circ=20^\circ$$

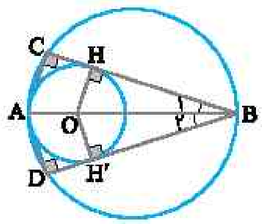
در نهایت

$$\hat{C}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}=\frac{1}{2}\times 20^\circ=10^\circ$$

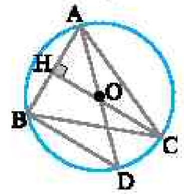


۲۳ از نقطه‌ی A به نقطه‌های C و D وصل می‌کنیم. در این صورت زاویه‌های C و D محاطی روبرو به قطر هستند، پس قائمه هستند. از طرف دیگر O مرکز دایره‌ی کوچک‌تر از دو وتر BC و BD به یک فاصله است $(OH=OH')$، پس OB نیمساز زاویه‌ی B است، بنابراین

$$\begin{cases}\hat{B}_1=\hat{B}_2\\ \hat{C}=\hat{D}=90^\circ\\ AB=AB\end{cases}\xrightarrow[\text{زاویه‌ی حاده}]{\text{وتر و یک}}\triangle ABC\cong\triangle ABD\Rightarrow BC=BD$$



۲۴ زاویه‌ی ABD محاطی روبه‌رو به قطر است پس قائمه است، بنابراین DB بر AB عمود است. از طرف دیگر CH بر AB عمود است، پس CH و DB بر یک خط عمودند، پس موازی‌اند.



۲۵ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم $\widehat{BD}=x$. چون کمان‌های محصور بین دو وتر موازی مساوی هستند، پس

$$\widehat{AC}=\widehat{BD}=x$$

از طرف دیگر، چون $AB\parallel CD$ و AD مورب است، پس

$$D\hat{A}B=A\hat{D}C=\frac{\widehat{AC}}{2}=\frac{x}{2}$$

همچنین چون $AB\parallel CD$ و OC مورب است، پس

$$O\hat{C}D=A\hat{O}C=\widehat{AC}=x$$

اکنون در مثلث CMD، زاویه‌ی CMA زاویه‌ی خارجی است، پس

$$75^\circ=x+\frac{x}{2}$$

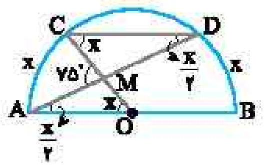
یعنی $x=50^\circ$. در نهایت چون AB قطر است، پس

$$\widehat{AC}+\widehat{CD}+\widehat{DB}=180^\circ$$

در نتیجه

$$50^\circ+\widehat{CD}+50^\circ=180^\circ$$

یعنی $\widehat{CD}=80^\circ$.



۲۶ ابتدا توجه کنید که چون AB قطر است، پس

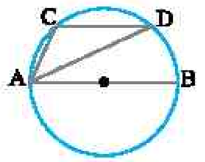
$$\widehat{AB}=180^\circ$$

همچنین، کمان‌های محصور بین دو وتر موازی مساوی‌اند، بنابراین

$$\widehat{BD}=\widehat{AC}$$

به این ترتیب

$$A\hat{C}D-A\hat{D}C=\frac{1}{2}(\widehat{AB}+\widehat{BD})-\frac{1}{2}\widehat{AC}$$
$$=\frac{1}{2}\widehat{AB}+\frac{1}{2}\widehat{BD}-\frac{1}{2}\widehat{AC}$$
$$=\frac{1}{2}\widehat{AB}=\frac{1}{2}\times180^\circ=90^\circ$$



۲۷ چون AD نیمساز است، پس $B\hat{A}D=D\hat{A}C$ در نتیجه کمان‌های روبه‌روی این دو زاویه‌ی محاطی یعنی BD و DC مساوی‌اند. از طرف دیگر می‌دانیم کمان‌های بین دو وتر موازی AB و DE مساوی‌اند. بنابراین دو کمان AE و BD مساوی‌اند. پس با اضافه کردن کمان EC به هر دو آن‌ها می‌نویسیم

$$\widehat{AE}+\widehat{EC}=\widehat{BD}+\widehat{EC}\xrightarrow{\widehat{BD}=\widehat{DC}}$$

$$\widehat{AE}+\widehat{EC}=\widehat{DC}+\widehat{EC}\Rightarrow\widehat{AEC}=\widehat{DCE}$$

چون دو کمان AEC و DCE مساوی‌اند، پس دو وتر نظیر آن‌ها یعنی AC و DE برابرند.

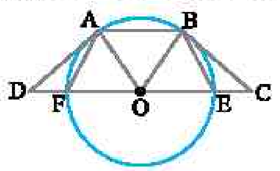
۲۸ دو مثلث OAD و OBC به حالت (ض ز ض) همنهشت هستند، چون

$$OC=OD\,,\quad AD=BC\,,\quad \hat{D}=\hat{C}$$

پس $OA=OB$ بنابراین دایره‌ی به مرکز O و شعاع OA از رأس B می‌گذرد. از طرف دیگر کمان‌های بین دو وتر موازی یک دایره مساوی‌اند. بنابراین

$$AB\parallel DC\Rightarrow\widehat{AF}=\widehat{BE}\Rightarrow AF=BE$$

در ضمن چون $OE=OF$ و $OD=OC$، پس $DF=EC$.



۲۹ توجه کنید که چون زاویه‌ی B محاطی است، پس $\widehat{AC}=2\hat{B}=100^\circ$، همچنین

$$\widehat{AB}=360^\circ-(\widehat{AC}+\widehat{BC})=360^\circ-(100^\circ+120^\circ)=140^\circ$$

به این ترتیب

$$x=\frac{\widehat{AB}}{2}=\frac{140^\circ}{2}=70^\circ$$

۳۰ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم که در آن CD را رسم می‌کنیم. توجه کنید که

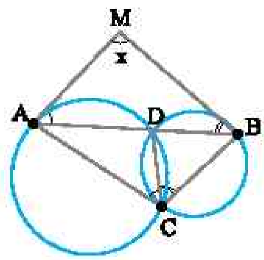
$$\widehat{ACD}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AD} \quad , \quad \widehat{MAD}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AD}$$

پس $\widehat{MAB}=\widehat{ACD}$. با استدلال مشابه، $\widehat{MBA}=\widehat{BCD}$. با جمع کردن این دو تساوی به‌دست می‌آید

$$\widehat{MAB}+\widehat{MBA}=\widehat{ACB}=۱۰۰^\circ$$

اکنون در مثلث MAB نتیجه می‌گیریم

$$x=۱۸۰^\circ-۱۰۰^\circ=۸۰^\circ$$



۳۱ ابتدا توجه کنید که زاویه‌های C و D محاطی روبه‌رو به یک کمان هستند، پس

$$\hat{C}=\hat{D}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$$

یعنی

$$z=۴۸^\circ \quad , \quad \overset{\frown}{AB}=۹۶^\circ$$

به همین ترتیب

$$x=y=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{CD}$$

همچنین

$$\widehat{CED}=\frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD}}{۲}$$

یعنی

$$۱۰۰^\circ=\frac{۹۶^\circ+۲x}{۲}$$

پس $x=y=۵۲^\circ$.

۳۲ از نمادگذاری شکل استفاده می‌کنیم. به دو روش می‌توان این مسئله را حل کرد.

روش اول چون $OA=AM=R$، پس

$$\widehat{AOM}=\widehat{AMO}=\alpha$$

زاویه‌ی AOD مرکزی است. پس $\overset{\frown}{AD}=\alpha$. زاویه‌ی BAO زاویه‌ی خارجی برای مثلث OAM است.

$$\widehat{BAO}=\widehat{AOM}+\widehat{AMO}=\alpha+\alpha=۲\alpha$$

$OA=OB=R$، پس مثلث OAB متساوی‌الساقین است و

$$\widehat{OBA}=\widehat{BAO}=۲\alpha$$

در نهایت زاویه‌ی BOC زاویه‌ی خارجی برای مثلث OMB است، پس

$$\widehat{BOC}=\widehat{OBM}+\widehat{BMO} \quad \text{یا} \quad \beta=۲\alpha+\alpha=۳\alpha$$

روش دوم قسمت اول این روش تا آنجا که $\overset{\frown}{AD}=\alpha$ مانند روش اول است. اما از آنجا به بعد روش تغییر می‌کند. می‌دانیم

$$\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{AD}}{۲}$$

یعنی

$$\alpha=\frac{\overset{\frown}{BC}-\alpha}{۲}$$

پس

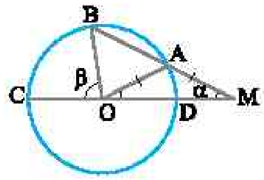
$$\overset{\frown}{BC}=۳\alpha$$

زاویه‌ی BOC مرکزی است، پس

$$\widehat{BOC}=\overset{\frown}{BC}$$

یعنی

$$\beta=۳\alpha$$



۳۳ ابتدا توجه کنید که

$$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{EC}=۶۰^\circ$$

از طرف دیگر،

$$\widehat{BAD}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{BD}=\frac{۱}{۲}\times۶۰^\circ=۳۰^\circ$$

$$\widehat{EDA}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AE}=\frac{۱}{۲}\times۶۰^\circ=۳۰^\circ$$

پس

$$\widehat{MAD}=\widehat{MDA}$$

یعنی مثلث MAD متساوی‌الساقین است

$$MD=MA \qquad (۱)$$

با استدلالی مشابه نتیجه می‌شود

$$NE=NA \qquad (۲)$$

همچنین، توجه کنید که

$$\hat{A}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{BC}=\frac{۱}{۲}\times۱۲۰^\circ=۶۰^\circ$$

پس مثلث AMN متساوی‌الساقین با زاویه‌ی رأس ۶۰° است، بنابراین متساوی‌الاضلاع است، بنابراین

$$MN=AM=AN \qquad (۳)$$

اکنون با مقایسه‌ی برابری‌های (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می‌گیریم

$$DM=MN=NE$$